紀伊國屋数学叢書

18

柏原正樹　河合隆裕　木村達雄

代数解析学の基礎

紀伊國屋書店

序

著者等がいろいろの形でお世話になっている京都大学数理解析研究所が発足(1963年)する前，その目標について様々の論議があったと聞く．その中で，最も控え目な意見は，“新しい時代の‘クーラン・ヒルベルト’*)を産み出せる研究所としよう”というものであった由．本書は，その規模においてささやかなものであり，著者等の夢とする“解析教程”の序章に過ぎないものではあるけれど，その意図する所は，まさに，この“新しい時代に向けての‘クーラン・ヒルベルト’”に他ならない．本書の表題に言う“代数解析学”の定義は一人一人の研究者によって異なるであろうけれど，コホモロジー理論に代表される代数的手法により，解析学を研究する，という問題意識は斯学の研究者に共通のものであろう．もちろん，そう言ったのでは，余りに漠としている．実際，解析学の大きな転換点においては殆んど常にそのような現象が見られたと言ってよい．たとえば，岡先生は，第7論文の主題である不定域イデアルの理論を自ら評して，“抽象代数学の勝利”と述べられたと聞く**)．また，そもそも微積分法の誕生時からして，少くともライプニッツにとって，その関心の大きな部分が，無限小解析の代数化にあったと思われる．しかしながら，本書の表題に言う“代数解析学”という語は，もっと限定的に佐藤(幹夫)先生の目指される，(たとえばオイラーの数学がそうであったように)解析学の枠組がいろいろ変化しても，なお生き残る実質的な内容を見出すことを目標とする解析学，という歴史的な意味合いも加えて用いられている．そして本書ではそのような思

*) Courant, R. and D. Hilbert: Methods of Mathematical Physics, I and II, Interscience, 1953 and 1962. この第2巻には，ニューヨーク大学クーラン数理科学研究所の雰囲気が強い影響を与えていると思われる．もちろん，同時に逆方向の影響も強いであろうが．

**) 数学，12巻(1960) p. 159の秋月先生の文章による．なお，不定域イデアルの通論は，カルタン (H. Cartan)，セール(Serre) らにより整理されて，今では普通，連接層の理論と呼ばれている．(一松 [1] 参照)

想の最も実り豊かな成果である線型微分方程式の超局所理論，即ち，解析学を余接バンドル上で展開すると云う新しい視点について説くことを具体的な目標とした．著者等は，本書で説いた程度の事実はかなり近い将来に，ちょうど過去において“クーラン・ヒルベルト”の内容がそうであったように，解析学，理論物理学の研究者にとっては常識になるであろう，と期待している．

もちろん，このような意図を持って本書の準備にかかったとは言え，日進月歩の斯学の進歩に遅れないように前進することをまず自らの第一課題とする著者等にとって，本書の執筆はやや荷に余る仕事であり，今筆を擱いて，なお，意に満たぬ所が多く残ることは否めない．しかしながら，“最善を目指すことは善きことの敵である”との諺もあるとか，たとえ欠点の多い本書にもせよ，心ある読者には有益な点もその中にはあるに違いないと信じ，そして，また，身勝手な台詞ではあるけれど，著者等が何時の日か，“解析教程”を準備する，その出発点として本書を上梓させて頂きたいと考えている．また，言うまでもなく，本書が“新しい時代の‘クーラン・ヒルベルト’”を目指す，というのは，その理念においてであり，本書の完成度は，碩学クーランの多年に亘る努力の結晶である“クーラン・ヒルベルト”と比較になるものではない．それだけに，むしろ，著者等の今後の為に，本書の内容について読者諸賢の御叱正を賜わることができれば幸いである．

以下，少しく具体的に本書の内容を概観する．

第1章第1節ではまずコホモロジー理論を簡単に復習し，それを用いて超函数の層の定義を与えた．解析系の学生がコホモロジー理論に触れる機会が(その重要性にも拘らず)かなり乏しいのが，日本の大学の現状のように思われるので，記号の準備も兼ねて，層係数のコホモロジー理論についてやや詳しく準備した．読者は各自の知識に応じて適宜省略して読まれたい．第1章第2節では，“超函数とは正則函数の境界値である”という陳述を，チェック(Čech)のコホモロジー群を用いて，数学的に定式化することを目標とした．第2章第3節と合わせて読者は超函数の具体的描像を得ることができよう．

第2章では，まず第1節において microfunction の層が余接バンドル上に構成される．これによって本書の主題である超局所解析の舞台が設定される．

次に，第2節で，多変数函数論に関係したいくつかの準備を行った後，第3節において，microfunction の特性を詳しく調べる．更に第4節でいくつかの例について具体的に論じる．

なお，本書は 'microfunction' という英語を用いて執筆した．これは，著者等としては極めて残念なことであったが，未だ適訳を見出せない為，意に満たぬ訳語が固定されてしまうよりはと考えて，英語のまま用いることとした．

第3章第1節，第2節では，microfunction に関する基本的演算について論じた．ここで内容的には，佐藤－河合－柏原［1］（S-K-K［1］と本書では略記する）に従ったが，S-K-K[1] の記述が初学者にはとりつき難いようなので，かなり述べ方は変更した．その為に，論理的には，ある補題（命題3.1.1）を直接証明することが必要となったけれど，その直接証明は本書の主題とはやや離れた，かなり技術的かつ複雑なものとなり，却って読者を疲れさせると思われる．そこで，入門書としての本書の性格を考慮して，この補題はいわば“公理”として認めて，その後を詳述する，という方法を採ることとした．第4節～第6節では，microfunction の理論が，線型微分方程式論に如何に有効に用いられるかを，楕円型方程式および双曲型方程式を素材に，具体的に論じた．この三節の内容は，第4章で論じる擬微分方程式論への準備ともなっている．なお，この三節に先立ち，代数解析的手法により理論物理学の研究を進める，という近時盛んになりつつある研究方向への招待状として，やや他の節とは趣きの異なる“Feynman 積分の解析性”という問題を第3節で論じてみた．Microfunction に対する演算を理解するのに適当な演習問題となる，と考えたからでもある．第7節では，microfunction の層の脆弱性について，また，第8節では正則パラメタを持つ超函数について論じた．この二節は，他の節で論じ残した microfunction に関する重要な事実を補う為のものである．

第4章では，microfunction の理論が最も有効に用いられる擬微分方程式論について論じた．まず第1節で擬微分作用素の定義とその基本的性質を述べ，続いて第2節で“（擬微分作用素の）量子化（された）接触変換”について論じる．“量子化接触変換”は線型微分方程式の理論を一新した，極めて重要な概念である．実際，第3節で microfunction の理論と量子化接触変換の理論を合わせ用いることにより，線型（擬）微分方程式の解の構造についての深い結果

が，余りに容易に得られてしまうことを見て，読者は驚かれることであろう．超局所解析の精髄とも言うべき所である．なお，本章でも第3章と同じく，読者が出来るだけ理論の具体的描像を得易いよう，論理的整合性より，むしろ判り易さを主眼にして論を進めた．たとえば第1節で δ-函数の平面波展開を出発点として擬微分作用素を導入した点，また，第2節で母函数を持つ接触変換に議論を限った点等がそうである．これ等の点をより“代数解析的に”論じることは，極大過剰決定系の理論に中心を置いて擬微分方程式論を詳述する書を，何時か我々が執筆する際の課題として残しておくこととした．また，第3節でも，読者に議論の本質を理解して頂く為，結果の一般性はかなり犠牲とした．

序を終えるにあたり，著者等共通の恩師であり，いやそんなことより何より，本書の内容の殆んどすべてに亘ってその本質的な idea を提出された佐藤幹夫先生に心からの感謝を捧げたい．著者等としては，本書が，佐藤先生の躍動的な数学の息吹きをいくらかでも読者に伝えることに成功していれば，と念じている．また，著者等の中，柏原・河合の二人は，ちょうどその研究方向を定めようとしている頃に，小松彦三郎先生の超函数論の入門講義*) に出席することができるという幸運に恵まれた．本書は，或いは，小松先生への十年遅れのレポート，とも言えようか．更に，吉田(耕作)，秋月(康夫)両先生は，佐藤先生を中心とする著者等の仕事を，終始暖く見守り，また，支援して下さった．また，京都大学大学院生上野喜三雄，米村明芳両氏は読み辛い原稿に眼を通して多くの有益な助言を下さり，また，米村氏と上智大学大学院生野海正俊氏は校正刷りを読むのを手伝って下さった．これ等の方々に，この機会に心からのお礼を申し上げたい．なお，本書準備中に，著者等は，京都大学数理解析研究所，名古屋大学数学教室，カリフォルニア大学ミラー基礎科学研究所，ハーバード大学数学教室，プリンストン高等研究所，パリ北大学数学教室，マサチューセッツ工科大学数学数室に(誰かが何かの形で)お世話になった．これ等の諸

*) 東大セミナリーノート，No. 22，“佐藤の超函数と定数係数線形偏微分方程式”として記録が残っている．当時としては，“入門”と言うよりむしろこの分野の最高レベルのものであった．

機関ならびに，そこで著者等が何かとお世話をおかけした諸先生に心からの感謝の言葉を述べたい．そして，last but not least，若輩の我々にこの書を執筆する機会を与えて下さったのみならず，遅筆の我々を根気よく督促する労を取って下さった伊藤清三先生に心からお礼を申し上げるとともに，この機会に改めて遅筆のおわびを申し上げたい．実際，伊藤先生の暖い励ましが無ければ，本書がこのような形で出版されることはまず無かったであろう．

超函数論成人*)の年８月

著者等識す

*) 佐藤先生が超函数論の概要を印刷物として発表されたのが，1958 年であることによる．

目　次

第1章　超函数 (Hyperfunction)*)

§1. 代数的準備

まず基礎的な概念を列挙しよう．

定義 1.1.1. 位相空間 X 上の**前層**(presheaf) とは X の各開集合 U に加法群 $\mathscr{F}(U)$ を対応させる対応と，$U\supset V$ なる開集合 U, V に対して，準同型 $\rho_{V,U}$: $\mathscr{F}(U)\to\mathscr{F}(V)$ が存在して

1)　$\rho_{U,U}=\mathrm{id}_U$ $(=\mathscr{F}(U)$ 上の恒等写像)

2)　$V_1\subset V_2\subset V_3$ なる開集合 V_1, V_2, V_3 に対して

$$\rho_{V_1,V_2}\circ\rho_{V_2,V_3}=\rho_{V_1,V_3}$$

を満たすものを謂う．$\rho_{V,U}$ を制限 (restriction) (又は制限写像 (restriction map)) と謂い，$s\in\mathscr{F}(U)$ の $\rho_{V,U}$ による像 $\rho_{V,U}(s)$ を $s|_V$ と記す．

定義 1.1.2. $\mathscr{F}$ を X 上の前層とする時，点 $x\in X$ における $\mathscr{F}$ の**茎** (stalk) $\mathscr{F}_x$ とは $\mathscr{F}_x=\varinjlim_{x\in U}\mathscr{F}(U)$ のことである．ここで $\varinjlim$ は**帰納的極限** (inductive limit) を表わす．即ち $\bigcup_{x\in U}\mathscr{F}(U)$ に同値関係～を

$s_1\sim s_2$ $(s_1\in\mathscr{F}(U),\ s_2\in\mathscr{F}(V))$ であるのは，x を含む十分小さい開集合 W が存在して $s_1|_W=s_2|_W$，となる時，かつその時に限る．

と定義し，これで類別したものである．従って，$x\in U$ に対して $\mathscr{F}(U)\to\mathscr{F}_x$ なる自然な写像ができる．ここで $s\in\mathscr{F}(U)$ の像を s_x と記せば，定義により $(s_1)_x=(s_2)_x$ となるのは $x\in V\subset U$ なる開集合 V が存在して $s_1|_V=s_2|_V$ となる時，かつその時に限る．

定義 1.1.3. X 上の前層 $\mathscr{F}$ が次の条件を満たす時，$\mathscr{F}$ を**層** (sheaf) であると謂う．

---

*)　本書では佐藤 [1] により導入された一般化函数 (generalized function) を単に超函数と呼び，Schwartz [1] の distribution は原語のままで用いる．歴史的には，岩村聯氏による "distribution" という語の名訳 " 超函数 " を逆に英訳して "hyperfunction" なる語が作られたのであろう．

X の開集合 U の任意の開被覆 (open covering) $U=\bigcup_{i\in I} U_i$ に対して次の (a), (b) が成り立つ.

(a)　$s\in\mathscr{F}(U)$ が任意 $i\in I$ に対して $s|_{U_i}=0$ を満たせば $s=0$.

(b)　各 $i\in I$ に対して $s_i\in\mathscr{F}(U_i)$ が存在して任意の $i,j\in I$ に対して $s_i|_{U_i\cap U_j}=s_j|_{U_i\cap U_j}$ が満たされれば, $s\in\mathscr{F}(U)$ であって任意の i に対して $s|_{U_i}=s_i$ となるものが存在する.

定義 1.1.4. $\mathscr{F},\mathscr{G}$ を X 上の前層とする時, $f\colon\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ が**射** (morphism) であるとは, 各開集合 U に対して $f(U)\colon\mathscr{F}(U)\to\mathscr{G}(U)$ なる準同型が与えられ, $U\supset V$ なる開集合 U, V に対して, 左図が可換になるものを謂う. そしてこのことから $\{f(U)\}$ は各点 $x\in X$ における茎の間の準同型 $f_x\colon\mathscr{F}_x\to\mathscr{G}_x$ をひきおこす.

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{F}(U) & \xrightarrow{f(U)} & \mathscr{G}(U) \\
\downarrow{\scriptstyle \rho_{V,U}} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \rho_{V,U}} \\
\mathscr{F}(V) & \xrightarrow{f(V)} & \mathscr{G}(V)
\end{array}$$

定義 1.1.5. $\mathscr{F}$ を X 上の前層とする. X 上の層 $\mathscr{F}'$ が $\mathscr{F}$ に付随した層である (又は, $\mathscr{F}'$ は $\mathscr{F}$ の**層化**である, 又は $\mathscr{F}'$ は前層 $\mathscr{F}$ から誘導された層である) とは, X の開集合 U に対して, 次のような $\mathscr{F}'(U)$ を対応させる前層 (実は層になる) のことを謂う.

$\mathscr{F}'(U)$ は, $U\xrightarrow{s}\bigcup_{x\in U}\mathscr{F}_x$ なる写像であって各 $x\in U$ に対して x の近傍 U' $(\subset U)$ と $s'\in\mathscr{F}(U')$ が存在して $s(x')=s'_{x'}$ が U に属する任意の x' に対して成り立つようなもの全体から成る.

$\mathscr{F}$ から層 $\mathscr{G}$ への射があれば $\mathscr{F}'$ から $\mathscr{G}$ への射が一意的に存在する. $\mathscr{F}$ と $\mathscr{F}'$ の茎は同型である.

定義 1.1.6. $\mathscr{F}'$, $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}''$ を位相空間 X 上の層とする時, $\mathscr{F}'\xrightarrow{f'}\mathscr{F}\xrightarrow{f}\mathscr{F}''$ が完全 (exact)*) である, 又は**完全系列** (exact sequence) をなす, とは $\mathscr{F}'_x\xrightarrow{f'_x}\mathscr{F}_x\xrightarrow{f_x}\mathscr{F}''_x$ が完全, 即ち $\mathrm{Ker} f_x=\mathrm{Im} f'_x$ (Ker は kernel (核) の, Im は image (像) の略) が各点 $x\in X$ で成り立つことを謂う.

位相空間 X 上の層 $\mathscr{F},\mathscr{G}$ と射 $f\colon\mathscr{F}\longrightarrow\mathscr{G}$ が与えられている時, X の開集合 U に対して $\mathrm{Ker}(\mathscr{F}(U)\xrightarrow{f(U)}\mathscr{G}(U))$ を対応させて得られる準層は層となる. この層

*)　小松彦三郎氏は嵌合と訳されている. 字義としてはこの方が好ましいが, 今一応慣例に従って完全と訳すことにする.

を $\mathrm{Ker}(f)$ と記す．一方，U に対して $\mathrm{Coker}(\mathscr{F}(U)\xrightarrow{f(U)}\mathscr{G}(U))=\mathscr{G}(U)/\mathrm{Im}f(U)$ を対応させると準層が得られるけれども，これは一般には層にはならない．この準層の誘導する層を $\mathrm{Coker}(f)$ と記す．その時，定義より直ちに次の完全系列が得られる．

$$0\longrightarrow \mathrm{Ker}(f)\longrightarrow \mathscr{F}\xrightarrow{f}\mathscr{G}\longrightarrow \mathrm{Coker}(f)\longrightarrow 0.$$

なお，$\mathrm{Ker}f=0$ の時，$\mathscr{F}$ と $\mathrm{Im}f$ を同一視して $\mathrm{Coker}(f)$ を $\mathscr{G}/\mathscr{F}$ と記すことも多い．

定義 1.1.7. X, Y を位相空間として $f\colon X\to Y$ を連続写像とする．$\mathscr{F}$ が X 上の層である時，Y の開集合 U に対して $\mathscr{F}(f^{-1}(U))$ を対応させると，Y 上の前層が得られて，しかもこれは層になる．この層を $\mathscr{F}$ の f による**順像** (direct image) と謂い $f_*(\mathscr{F})$ と記す．

$\mathscr{G}$ が Y 上の層である時，X の開集合 U に対して $\varinjlim_{V\supset f(U)}\mathscr{G}(V)$ を対応させると前層が得られるけれども，これは一般には層にならない．これが誘導する層を $\mathscr{G}$ の f による**逆像** (inverse image) と言い，$f^{-1}(\mathscr{G})$ と記す．また，S を X の任意の部分集合として $j_S\colon S\hookrightarrow X$ なる埋め込み写像 j_S に対し，$j_S^{-1}\mathscr{F}$ により定義される層を $\mathscr{F}$ の S への**制限**と呼び，$\mathscr{F}|_S$ と記す．

Y 上の層 $\mathscr{G}$ に対して $\mathscr{G}\to f_*(f^{-1}(\mathscr{G}))$ なる自然な写像が存在し，各 $x\in X$ に対して $(f^{-1}\mathscr{G})_x=\mathscr{G}_{f(x)}$ であることに注意しよう．また，$\mathscr{F}$ が X 上の層である時，射 $\mathscr{G}\to f_*\mathscr{F}$ を与えることと射 $f^{-1}\mathscr{G}\to\mathscr{F}$ を与えることとは同等である．

定義 1.1.8. $\mathscr{F}$ を位相空間 X 上の層，U を X の開集合とする．$s\in\mathscr{F}(U)$ に対して，集合 $\{x\in U\,|\,s_x\neq 0\}$ を s の**台** (support) といい $\mathrm{Supp}(s)$ と記す．これは U の中の閉集合になっている．

定義 1.1.9. $\mathscr{F}$ を位相空間 X 上の層，S を X の局所閉集合(即ち開集合と閉集合の共通部分)とする時，$\Gamma_S(X,\mathscr{F})=\{s\in\mathscr{F}(U)\,|\,\mathrm{Supp}(s)\subset S\}$ と定義する．ここで U は X 内の開集合であって S は U の中で(相対位相に関して)閉とする．

上の定義が well-defined であること，即ち $\Gamma_S(X,\mathscr{F})$ の定義が U のとり方によらないことを示そう．U_1, U_2 がこの条件を満たせば $U_1\cap U_2$ もそれを満

たす．即ち，$U_1 \cap U_2$ は X 内の開集合であって S は $U_1 \cap U_2$ の中で閉である．従って，$S \subset U_1 \subset U_2 \subset X$，かつ，$S$ は U_1 および U_2 の中で閉と仮定してよい．ここで $\{s \in \mathscr{F}(U_2) \mid \mathrm{Supp}(s) \subset S\}$ から $\{s \in \mathscr{F}(U_1) \mid \mathrm{Supp}(s) \subset S\}$ への写像 φ を $\varphi(s) = s|_{U_1}$ で定義すれば，φ は明らかに全単射になり，$\Gamma_S(X, \mathscr{F})$ が U のとり方によらず定まることがわかる．

特に $S = X$ の時には $\Gamma_S(X, \mathscr{F}) = \Gamma(X, \mathscr{F})$ とも記し，その元を大域的断面 (global section) と謂う．即ち，$\Gamma(X, \mathscr{F}) = \mathscr{F}(X)$ である．一般に X の開集合 U に対して $\mathscr{F}(U)$ を $\Gamma(U, \mathscr{F})$ とも記し，その元を $\mathscr{F}$ の U 上の**断面** (section) と謂う．

定義 1.1.10. $\mathscr{F}$ を位相空間 X 上の層，S を X の局所閉集合とする．X の開集合 U に $\Gamma_{S \cap U}(U, \mathscr{F}) = \{s \in \mathscr{F}(U) \mid \mathrm{Supp}(s) \subset S \cap U\}$ を対応させて得られる層を $\Gamma_S(\mathscr{F})$ と記す．

定義 1.1.11. 位相空間 X 上の層が**脆弱** (flabby) (又は散布的 (scattered))*) であるとは，X の任意の開集合 U に対して $\rho_{U,X} \colon \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(U)$ が全射になっていることを謂う．即ち，$\mathscr{F}$ の U 上の断面はすべて $\mathscr{F}$ の X 上の断面に拡張できる時，$\mathscr{F}$ を脆弱層と謂う．

命題 1.1.1. $\mathscr{F}$ を位相空間 X 上の脆弱層，S を X の局所閉集合とすると，$\Gamma_S(\mathscr{F})$ も脆弱層である．

［証明］ U_1 を X 内の開集合で S を閉集合として含むものとする．U を X の任意の開集合とする時，$U_1 \cap U$ は X 内の開集合であって $S \cap U$ を閉集合として含む．他方，$\Gamma_S(\mathscr{F})(U) = \Gamma_{S \cap U}(U, \mathscr{F})$ の元 s とは $s \in \mathscr{F}(U_1 \cap U)$ であって $\mathrm{Supp}(s) \subset S \cap U$ なるものである．従って，$s|_{(U_1 - S) \cap (U_1 \cap U)} = 0$ 故 $s' \in \mathscr{F}((U_1 - S \cup (U_1 \cap U))$ かつ $s'|_{U_1 - S} = 0$, $s'|_{U_1 \cap U} = s$ なる s' がただ一つ存在する．また $\mathscr{F}$ は脆弱層故 s' の U_1 への拡張 $\tilde{s} \in \mathscr{F}(U_1)$ が存在する．$\tilde{s}$ の定義により $\tilde{s}|_{U_1 - S} = 0$ であったから $\mathrm{Supp}(\tilde{s}) \subset S$，即ち $\tilde{s} \in \Gamma_S(X, \mathscr{F}) = \Gamma_S(\mathscr{F})(X)$ を得る．

（証終）

命題 1.1.2. $\mathscr{F}', \mathscr{F}, \mathscr{F}''$ を位相空間 X 上の層，U を X の開集合，S を X の局所閉集合とする．

---

*) 佐藤 [1] は hyperfine と呼んでいる．

(1) $0 \longrightarrow \mathscr{F}' \xrightarrow{f'} \mathscr{F} \xrightarrow{f} \mathscr{F}''$ が完全ならば,

(i) $0 \longrightarrow \mathscr{F}'(U) \xrightarrow{f'(U)} \mathscr{F}(U) \xrightarrow{f(U)} \mathscr{F}''(U)$ も完全.

(ii) $0 \longrightarrow \Gamma_S(X, \mathscr{F}') \longrightarrow \Gamma_S(X, \mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma_S(X, \mathscr{F}'')$ も完全.

(2) $0 \longrightarrow \mathscr{F}' \xrightarrow{f'} \mathscr{F} \xrightarrow{f} \mathscr{F}'' \longrightarrow 0$ が完全, かつ $\mathscr{F}'$ が脆弱層ならば,

(i) $0 \longrightarrow \mathscr{F}'(U) \xrightarrow{f'(U)} \mathscr{F}(U) \xrightarrow{f(U)} \mathscr{F}''(U) \to 0$ も完全.

(ii) $0 \longrightarrow \Gamma_S(X, \mathscr{F}') \longrightarrow \Gamma_S(X, \mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma_S(X, \mathscr{F}'') \longrightarrow 0$ も完全.

[証明] まず(1)の(i)を証明しよう. まず $f'(U)$ が単射であることを言う. $s' \in \mathscr{F}'(U)$ が $f'(U)s'=0$ を満たせば U の各点 x について $f'_x s'_x=0$ 故 $s'_x=0$, 即ち x の近傍 $V(x)$ があって $s'|_{V(x)}=0$ である. 他方 $\mathscr{F}'$ は層であるから $s'=0$ を得る. 従って $f'(U)$ は単射である. 次に $\mathrm{Im} f'(U) \subset \mathrm{Ker} f(U)$ であることを示す. $s' \in \mathscr{F}(U)$ に対し $(f_x \circ f'_x)s'_x=0$ 故, 各点 x に対しある近傍 $V(x)$ があって $f(U)f'(U)s'|_{V(x)}=0$ となる. ここで $\mathscr{F}''$ は層であるから $f(U)f'(U)s'=0$ が成り立つ. 最後に $\mathrm{Im} f'(U) \supset \mathrm{Ker} f(U)$ を示そう. $s \in \mathscr{F}(U)$ かつ $f(U)s=0$ とすると, 各点 $x \in U$ について $f_x s_x=0$ 故 $f'_x s'_x=s_x$ なる $s'_x \in \mathscr{F}'_x$ が存在する. 即ち x の近傍 $V(x)(\subset U)$ があって $f'(V(x))s'(x)=s|_{V(x)}$ となる $s'(x) \in \mathscr{F}(V(x))$ が存在する. ここで $f'(V(x))$ は単射だから $s'(x)$ は一意的に定まる. 従って $s'(x)|_{V(x) \cap V(y)}=s'(y)|_{V(x) \cap V(y)}$ が成り立つ. よって $\mathscr{F}$ が層であることより $s' \in \mathscr{F}'(U)$ かつ $s'|_{V(x)}=s'(x)$ となる. この時 $f'(U)s'=s$ である. (1)の(ii)を示すには U は X 内の開集合であり S が U 内で閉なるものとして $s \in \mathscr{F}(U)$ かつ $\mathrm{Supp}(s) \subset S$ ならば, この s' についても $\mathrm{Supp}(s') \subset S$ となることを示せば十分である. 実際, $f'(U-S)s'|_{U-S}=s|_{U-S}=0$ であり, $f'(U-S)$ は単射故 $s'|_{U-S}=0$. 即ち, $\mathrm{Supp}(s') \subset S$.

次に(2)の(i)を示すには $f(U)$ が全射であることを言えば十分. $s'' \in \mathscr{F}''(U)$ をとり $\mathscr{M}=\{(s, V) \mid V$ は U の開部分集合, $s \in \mathscr{F}(V)$ かつ $f(V)s=s''|_V\}$ に順序関係 $(s_1 V_1) \succ (s_2, V_2)$ を,

$(s_1, V_1) \succ (s_2, V_2)$ となるのは $V_1 \supset V_2$ かつ $s_1|_{V_2}=s_2$ となる時, かつその時に限る,

として定めれば $\mathscr{M}$ は空でない帰納的順序集合になるから Zorn の補題により極大元が存在する. その一つを (s, V) とする時 $V=U$ となることを示せばよい. $V \neq U$ として $x \in U-V$ となる x をとると, 仮定から x の近傍 $V(x)$

と $s(x)\in\mathcal{F}(V(x))$ が存在して $(s(x),\ V(x))\in\mathcal{M}$ となる．
$f(V\cap V(x))(s-s(x))|_{V\cap V(x)}=0$ であるから，(1) より $s'\in\mathcal{F}'(V\cap V(x))$ で $f'(V\cap V(x))s'=(s-s(x))|_{V\cap V(x)}$ となるものが存在する．又 $\mathcal{F}'$ は脆弱層だから $\tilde{s}'\in\mathcal{F}'(V(x))$ かつ $\tilde{s}'|_{V(x)\cap V}=s'$ となるものが存在する．従って $\tilde{s}\in\mathcal{F}(V\cup V(x))$ を $\tilde{s}|_V=s,\ \tilde{s}|_{V(x)}=s(x)+f'(V(x))\tilde{s}'$ として定義すれば $(\tilde{s},\ V\cup V(x))\in\mathcal{M}$ となり $(s,\ V)$ の極大性に反する．従って，$V=U$ となり $f(U)$ が全射であることがわかる．(ii) についてもほぼ同様に証明できる．この場合には $\mathcal{M}$ として $\{(s,\ U)\,|\,s\in\Gamma_{S\cap U}(U,\mathcal{F}),\ U$ は開，かつ $f(U)s=s''|_U\}$ をとり $\mathcal{M}$ の極大元 $(s,\ V)$ として $(s,\ V)>(0,\ X-\mathrm{Supp}(s''))$ なるものをとればよい．（証終）

注意．逆に各開集合 U に対して $0\to\mathcal{F}'(U)\to\mathcal{F}(U)\to\mathcal{F}''(U)(\to 0)$ が完全なら $0\to\mathcal{F}'\to\mathcal{F}\to\mathcal{F}''(\to 0)$ も完全であることは明らかであろう．

系 1. $0\to\mathcal{F}'\xrightarrow{f'}\mathcal{F}\xrightarrow{f}\mathcal{F}''\to 0$ が完全系列であるとする．

(1)　$\mathcal{F}',\ \mathcal{F}$ がともに脆弱層ならば $\mathcal{F}''$ も脆弱層である．

(2)　$\mathcal{F}',\ \mathcal{F}''$ がともに脆弱層ならば $\mathcal{F}$ も脆弱層である．

［証明］　(1)，(2) いずれの場合とも $\mathcal{F}'$ が脆弱層故可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}'(X) & \xrightarrow{f'(X)} & \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{f(X)} & \mathcal{F}''(X) & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle \rho'_{U,X}} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \rho_{U,X}} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \rho''_{U,X}} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}'(U) & \xrightarrow[f'(U)]{} & \mathcal{F}(U) & \xrightarrow[f(U)]{} & \mathcal{F}''(U) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

において横の2行はともに完全であることにまず注意しよう．

(1) の場合は $\mathcal{F}$ が脆弱層だから $\rho_{U,X}$ は全射である．他方，$f(U)$ も全射だから任意の $s''\in\mathcal{F}''(U)$ に対して $s\in\mathcal{F}(X)$ が存在して $s''=f(U)\rho_{U,X}(s)=$
$=\rho''_{U,X}(f(X)s)$ となり $\rho''_{U,X}$ も全射である．即ち $\mathcal{F}''$ は脆弱層である．

(2) の場合は $s\in\mathcal{F}(U)$ に対し $\rho''_{U,X}$ と $f(X)$ がともに全射だから $\tilde{s}\in\mathcal{F}(X)$ で $\rho''_{U,X}f(X)\tilde{s}=f(U)s$ となるものが存在する．然るに $\rho''_{U,X}f(X)\tilde{s}=$
$=f(U)\rho_{U,X}\tilde{s}$ 故 $f(U)(s-\rho_{U,X}\tilde{s})=0$ が成り立つ．よって $\rho'_{U,X}$ が全射であることに注意すれば $\tilde{s}'\in\mathcal{F}'(X)$ であって $s-\rho_{U,X}\tilde{s}=f'(U)\rho'_{U,X}\tilde{s}'=\rho_{U,X}f'(X)\tilde{s}'$ となるものが存在する．即ち，$s=\rho_{U,X}(\tilde{s}+f'(X)\tilde{s}')$ となり $\rho_{U,X}$ が全射であることが示された．よって $\mathcal{F}$ は脆弱層である．（証終）

系 2. $0\to\mathcal{F}^0\to\mathcal{F}^1\to\cdots\to\mathcal{F}^r\to\mathcal{G}\to 0$ が完全で各 $\mathcal{F}^i(0\leqq i\leqq r)$ が脆弱層ならば

$\mathscr{G}$ も脆弱層であり

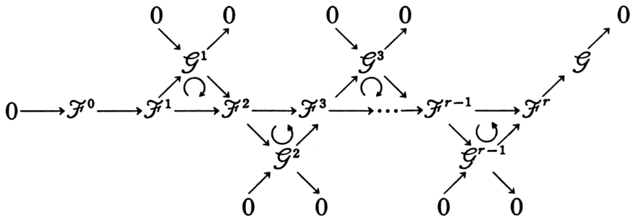
$$0\to\Gamma_S(X,\mathscr{F}^0)\to\Gamma_S(X,\mathscr{F}^1)\to\cdots\to\Gamma_S(X,\mathscr{F}^r)\to\Gamma_S(X,\mathscr{G})\to 0$$

および

$$0\to\mathscr{F}^0(U)\to\cdots\to\mathscr{F}^r(U)\to\mathscr{G}(U)\to 0$$

は共に完全系列である．

［証明］　この層についての長い完全系列 (long exact sequence) を



と短い完全系列 (short exact sequence) に分解すれば，系1によりまず $\mathscr{G}^1$ が脆弱層であることがわかる．仮定により $\mathscr{F}^2$ も脆弱層だから $\mathscr{G}^2$ も脆弱層となる．同じ議論を繰り返せば結局 $\mathscr{G}$ が脆弱層であることがわかる．同様にして $0\to\Gamma_S(X,\mathscr{F}^0)\to\Gamma_S(X,\mathscr{F}^1)\to\Gamma_S(X,\mathscr{G}^1)\to 0$,　$0\to\Gamma_S(X,\mathscr{G}^i)\to\Gamma_S(X,\mathscr{F}^{i+1})\to\Gamma_S(X,\mathscr{G}^{i+1})\to 0$ $(1\leqq i\leqq r-2)$，および $0\to\Gamma_S(X,\mathscr{G}^{r-1})\to\Gamma_S(X,\mathscr{F}^r)\to\Gamma_S(X,\mathscr{G})\to 0$ がいずれも完全故，それより後半の完全系列を得る．　(証終)

定義 1.1.12.　層 $\mathscr{F}$ の**脆弱分解** (flabby resolution) とは $0\to\mathscr{F}\to\mathscr{L}^0\to\mathscr{L}^1\to\cdots$ なる完全系列で各 $\mathscr{L}^i$ が脆弱層であるものを謂う．

命題 1.1.3.　位相空間 X 上の任意の層 $\mathscr{F}$ に対し $0\to\mathscr{F}\to\mathscr{L}$ (完全) となる脆弱層 $\mathscr{L}$ が存在する．特に $\mathscr{F}$ の脆弱分解が存在する．

［証明］　X の開集合 U に対して $\{s\mid U\xrightarrow{s}\bigcup_{x\in U}\mathscr{F}_x$, 但し，$s$ は $s(x)\in\mathscr{F}_x$ を満たす任意の写像$\}$ を対応させて得られる層 $\mathscr{C}^0\mathscr{F}$ は明らかに脆弱層であって，しかも，

$$0\to\mathscr{F}\to\mathscr{C}^0(\mathscr{F})\ \ (\text{完全})$$

となる．次に層 $\mathscr{Z}^0(\mathscr{F})$ を

$$0\to\mathscr{F}\to\mathscr{C}^0(\mathscr{F})\to\mathscr{Z}^0(\mathscr{F})\to 0\ \ (\text{完全})$$

で定義する．同様にして

$$0\to\mathscr{Z}^0(\mathscr{F})\to\mathscr{C}^0(\mathscr{Z}^0(\mathscr{F}))\to\mathscr{Z}^1(\mathscr{F})\to 0\ \ (\text{完全})$$

が得られ $\mathscr{C}^n(\mathscr{F})=\mathscr{C}^0(\mathscr{Z}^{n-1}(\mathscr{F}))$ $(n=1,2,\ldots)$ とおけば

$$0\to\mathscr{F}\to\mathscr{C}^0(\mathscr{F})\to\mathscr{C}^1(\mathscr{F})\to\cdots$$

は $\mathscr{F}$ の脆弱分解になる.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証終)

注意. 上のようにして構成された脆弱分解を**規準的脆弱分解**(canonical flabby resolution) という.

定義 1.1.13. $n=0,1,2,\cdots$ に対して加群 K^n と準同型 $d_n:K^n\to K^{n+1}$ が与えられていて $d_{n+1}\circ d_n=0$ を満たす時，これらの組 $K=\{K^n,d_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ を**双対鎖複体** (cochain complex)*) と謂う. もちろん仮定より $\mathrm{Im}\,d_{n-1}\subset\mathrm{Ker}\,d_n$ である. $\mathrm{Ker}\,d_n$ の元を n 次**双対輪体**(又は**コサイクル**, cocycle) と謂い $\mathrm{Im}\,d_{n-1}$ の元を n 次**双対境界輪体**(または**コバウンダリー**, coboundary) と謂う. 商群 $\mathrm{Ker}\,d_n/\mathrm{Im}\,d_{n-1}$ を n 次**コホモロジー群** (cohomology 群) と謂い $H^n(K)$ と記す.

K,K' を双対鎖複体とする時，$K\xrightarrow{f}K'$ が**射** (morphism) (又は双対鎖写像 (cochain transformation)) とは，各 n について準同型 $K^n\xrightarrow{f_n}K'^n$ が与えられていて下図が可換になる場合を謂う.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \longrightarrow & K^0 & \xrightarrow{d_0} & K^1 & \xrightarrow{d_1} & \cdots\to K^{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & K^n & \xrightarrow{d_n} & K^{n+1} & \longrightarrow & \cdots\cdots \\
 & & f_0\big\downarrow & \circlearrowleft & f_1\big\downarrow & & f_{n-1}\big\downarrow & \circlearrowleft & f_n\big\downarrow & \circlearrowleft & f_{n+1}\big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & K'^0 & \xrightarrow{d'_0} & K'^1 & \xrightarrow{d'_1} & \cdots\to K'^{n-1} & \xrightarrow{d'_{n-1}} & K'^n & \xrightarrow{d'_n} & K'^{n+1} & \longrightarrow & \cdots\cdots
\end{array}$$

又，K',K,K'' を複体とする時，

$$0\longrightarrow K'\xrightarrow{f'}K\xrightarrow{f}K''\longrightarrow 0$$

が完全であるとは，各 n について

$$0\longrightarrow K'^n\xrightarrow{f'_n}K^n\xrightarrow{f_n}K''^n\longrightarrow 0$$

が完全であることとする. 即ち，次頁の可換図式において縦列がすべて完全であることを謂う. その時，K' の n 次コサイクルは f'_n で K の n 次コサイクルへ移り，コバウンダリーについても同様であるから f'_n はコホモロジー群の準同型 $f'^*_n:H^n(K')\to H^n(K)$ をひき起こす. 同様に，$f^*_n:H^n(K)\to H^n(K'')$ もひき起こされる. 更に f_n は全射故 K'' の n 次コサイクル z''_n に対し K^n の元 z_n で

*) 以下略して単に複体とも言う.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots\to & & K'^{n-2} & \xrightarrow{d'_{n-2}} & K'^{n-1} & \xrightarrow{d'_{n-1}} & K'^{n} & \xrightarrow{d'_{n}} & K'^{n+1} & \to\cdots & \\
 & & \downarrow f'_{n-2} & \circlearrowleft & \downarrow f'_{n-1} & \circlearrowleft & \downarrow f'_{n} & \circlearrowleft & \downarrow f'_{n+1} & & \\
\cdots\to & & K^{n-2} & \xrightarrow{d_{n-2}} & K^{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & K^{n} & \xrightarrow{d_{n}} & K^{n+1} & \to\cdots & \\
 & & \downarrow f_{n-2} & \circlearrowleft & \downarrow f_{n-1} & \circlearrowleft & \downarrow f_{n} & \circlearrowleft & \downarrow f_{n+1} & & \\
\cdots\to & & K''^{n-2} & \xrightarrow{d''_{n-2}} & K''^{n-1} & \xrightarrow{d''_{n-1}} & K''^{n} & \xrightarrow{d''_{n}} & K''^{n+1} & \to\cdots & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

$f_n(z_n)=z''_n$ となるものがある．従って $f_{n+1}(d_nz_n)=d''_nf_n(z_n)=d''_nz''_n=0$ 故 K'_{n+1} の元 z'_{n+1} で $f'_{n+1}(z'_{n+1})=d_nz_n$ となるものが存在する．ここで z''_n に対して z'_{n+1} はコバウンダリーを法として一意的に決まるから準同型 $h^*_n\colon H^n(K'')\to H^{n+1}(K')$ は well-defined である．この時次の命題は応用上極めて重要である．

命題 1.1.4. $0\to K'\to K\to K''\to 0$ を複体の完全系列とする時，これから得られるコホモロジー群の列 $0\to H^0(K')\to H^0(K)\to H^0(K'')\to H^1(K')\to\cdots$ は完全である．

これは定義に従って直接確かめればよい．容易である．

系 **(Nine lemma)**

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & K^0 & \longrightarrow & K^1 & \longrightarrow & K^2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & L^0 & \longrightarrow & L^1 & \longrightarrow & L^2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & M^0 & \longrightarrow & M^1 & \longrightarrow & M^2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

左の可換図式において縦 3 列が完全，第 2 行は複体をなすとする．その時横 3 行のうち 2 行が完全ならば，他の 1 行も完全である．

［証明］ 第 2 行が複体をなすことから，横 3 行がすべて複体をなすことは容易にわかる．そこで命題 1.1.4 によりコホモロジー群の完全系列

$$0\longrightarrow H^0(K)\longrightarrow H^0(L)\longrightarrow H^0(M)\longrightarrow H^1(K)\to\cdots\to H^2(M)\longrightarrow 0$$

を得る．ここで例えば第 1，第 2 の行が完全ならば，$H^i(K)=H^i(L)=0$ $(0\leqq i\leqq 2)$ 故 $H^j(M)=0$ $(0\leqq j\leqq 2)$ を得る．即ち第 3 行は完全である．他の場合も同様である．　(証終)

注意． 第 2 行が複体をなすと云う仮定は必要である．実際，次頁の可換図式において $a+a=b+b=0$ と演算を定義した加群を考える．ここで

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \{0, a\} & \longrightarrow & \{0, a\} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \{0, b\} & \longrightarrow & \{0, b, a, a+b\} & \xrightarrow{\varphi} & \{0, a\} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \{0, b\} & \longrightarrow & \{0, b\} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

$\varphi(b)=\varphi(a)=a$, $\varphi(0)=\varphi(a+b)=0$ と定めれば φ は準同型であるけれども，第2行は複体にはならない．

同様にして得られる次の結果も有名である．

Five lemma.
$$\begin{array}{ccccccccc}
K_1 & \longrightarrow & K_2 & \longrightarrow & K_3 & \longrightarrow & K_4 & \longrightarrow & K_5 \\
h_1\downarrow & \circlearrowleft & h_2\downarrow & \circlearrowleft & h_3\downarrow & \circlearrowleft & h_4\downarrow & \circlearrowleft & h_5\downarrow \\
L_1 & \longrightarrow & L_2 & \longrightarrow & L_3 & \longrightarrow & L_4 & \longrightarrow & L_5
\end{array}$$
なる可換図式において横二行は完全，h_2, h_4 は同型，h_1 が全射，h_5 が単射ならば h_3 は同型である．

これも証明は易しい．各自試みられたい．

さて次に層を係数とするコホモロジー群を考えよう．

定義 1.1.14. $\mathscr{F}$ を位相空間 X 上の層，S を X の局所閉集合とする．S に台をもつ $\mathscr{F}$ の j 次**相対コホモロジー群** $H_S^j(X, \mathscr{F})$ とは，$0\to\mathscr{F}\to\mathscr{L}^0\to\mathscr{L}^1\to\cdots$ を $\mathscr{F}$ の一つの脆弱分解として，$\{\Gamma_S(X, \mathscr{L}^*)\}$ なる複体によって定められる j 次コホモロジー群，即ち

$$H^j(\Gamma_S(X, \mathscr{L}^*))=\frac{\mathrm{Ker}(\Gamma_S(X, \mathscr{L}^j)\to\Gamma_S(X, \mathscr{L}^{j+1}))}{\mathrm{Im}(\Gamma_S(X, \mathscr{L}^{j-1})\to\Gamma_S(X, \mathscr{L}^j))}\quad (j=0, 1, 2, \cdots)$$

のことである．

この定義は一つの脆弱分解を固定して与えられたが，次の定理 1.1.1 により定義が脆弱分解のとり方によらないことが判る．

定理 1.1.1. $H_S^j(X, \mathscr{F})$ は $\mathscr{F}$ の脆弱分解のとり方によらず規準的 (canonical) に定まる．

［証明］　まず次の補題に注意しよう．

補題 1. $f: \mathscr{F}\to\mathscr{G}$ を層の射とする．今，$0\to\mathscr{F}\to\mathscr{L}^0\to\mathscr{L}^1\to\cdots$ (完全) とすれば，$\mathscr{G}$ の脆弱分解 $0\to\mathscr{G}\to\mathscr{M}^0\to\cdots$ (完全) と層の射 $f_j: \mathscr{L}^j\to\mathscr{M}^j$ $(j=0, 1, \cdots)$ であって次の可換図式を成り立たせるものが存在する．

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathscr{F} & \longrightarrow & \mathscr{L}^0 & \longrightarrow & \mathscr{L}^1 & \longrightarrow & \cdots\cdots \\
 & & \downarrow f & \circlearrowleft & \downarrow f_0 & \circlearrowleft & \downarrow f_1 & & \\
0 & \longrightarrow & \mathscr{G} & \longrightarrow & \mathscr{M}^0 & \longrightarrow & \mathscr{M}^1 & \longrightarrow & \cdots\cdots
\end{array}$$

［証明］　帰納的に証明しよう．k までできたとする．即ち

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 \longrightarrow & \mathscr{F} & \longrightarrow & \mathscr{L}^0 & \longrightarrow & \mathscr{L}^1 & \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow & \mathscr{L}^k & \xrightarrow{g_k} & \mathscr{L}^{k+1} & \longrightarrow \\
& \downarrow f & \circlearrowleft & \downarrow f_0 & \circlearrowleft & \downarrow f_1 & \circlearrowleft \qquad \circlearrowleft & \downarrow f_k & & & \\
0 \longrightarrow & \mathscr{G} & \longrightarrow & \mathscr{M}^0 & \longrightarrow & \mathscr{M}^1 & \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow & \mathscr{M}^k & & &
\end{array}$$

なる $\mathscr{M}^j$ と $f_j (j=0, \cdots, k)$ が構成できたとしよう．次にまず $0 \to \mathscr{G} \to \mathscr{M}^0 \to \cdots \to \mathscr{M}^k \xrightarrow{h} \mathscr{Z} \to 0$ (完全) となる層 $\mathscr{Z}$ をとる．$\mathscr{L}^k \to \mathscr{Z} \oplus \mathscr{L}^{k+1}$ なる射を $x \mapsto (h \circ f_k(x), -g_k(x))$ として定義すると，$0 \to \mathscr{Z} \xrightarrow{\iota} \mathrm{Coker}\,(\mathscr{L}^k \to \mathscr{Z} \oplus \mathscr{L}^{k+1})$ は完全であり，しかも，

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{L}^k & \xrightarrow{g_k} & \mathscr{L}^{k+1} \\
\downarrow f_k & \circlearrowleft & \downarrow f'_{k+1} \\
\mathscr{M}^k & \xrightarrow{\iota \circ h} & \mathrm{Coker}\,(\mathscr{L}^k \to \mathscr{Z} \oplus \mathscr{L}^{k+1})
\end{array}$$

は定義から可換になる．但し $f'_{k+1}: \mathscr{L}^{k+1} \to \mathscr{Z} \oplus \mathscr{L}^{k+1}$ は $f'_{k+1}(x) = (0, x)$ として自然に得られる写像とする．従って $0 \to \mathrm{Coker}\,(\mathscr{L}^k \to \mathscr{Z} \oplus \mathscr{L}^{k+1}) \xrightarrow{\iota'} \mathscr{M}^{k+1}$ が完全となる脆弱層 $\mathscr{M}^{k+1}$ をとれば

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{L}^k & \xrightarrow{g_k} & \mathscr{L}^{k+1} \\
f_k \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \iota' \circ f'_{k+1} = f_{k+1} \\
\mathscr{M}^k & \xrightarrow[\iota' \circ \iota \circ h]{} & \mathscr{M}^{k+1}
\end{array}$$

なる可換図式を得る．　　（補題 1 の証終）

さて $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{L}^0 \to \mathscr{L}^1 \to \cdots$ および $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{L}'^0 \to \mathscr{L}'^1 \to \cdots$ を $\mathscr{F}$ の 2 つの脆弱分解としよう．この時，次の補題が成立する．

補題 2.　$\mathscr{F}$ の脆弱分解 $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{L}''^0 \to \mathscr{L}''^1 \to \cdots$ であって

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & \mathscr{F} & \longrightarrow & \mathscr{L}^0 & \longrightarrow & \mathscr{L}^1 & \longrightarrow \cdots\cdots \\
& \mathrm{id} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft \\
0 \longrightarrow & \mathscr{F} & \longrightarrow & \mathscr{L}''^0 & \longrightarrow & \mathscr{L}''^1 & \longrightarrow \cdots\cdots
\end{array}
\quad \text{かつ} \quad
\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & \mathscr{F} & \longrightarrow & \mathscr{L}'^0 & \longrightarrow & \mathscr{L}'^1 & \cdots\cdots \\
& \mathrm{id} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft \\
0 \longrightarrow & \mathscr{F} & \longrightarrow & \mathscr{L}''^0 & \longrightarrow & \mathscr{L}''^1 & \cdots\cdots
\end{array}$$

となるものが存在する．

［証明］　$\mathscr{F} \oplus \mathscr{F}$ の脆弱分解

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \oplus \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{L}^0 \oplus \mathscr{L}'^0 \longrightarrow \cdots\cdots$$

に対して前補題を用いて

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & \mathscr{F} \oplus \mathscr{F} & \longrightarrow & \mathscr{L}^0 \oplus \mathscr{L}'^0 & \longrightarrow & \mathscr{L}^1 \oplus \mathscr{L}'^1 & \to \cdots \\
& \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \\
0 \longrightarrow & \mathscr{F} & \longrightarrow & \mathscr{L}''^0 & \longrightarrow & \mathscr{L}''^1 & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

となる $\mathscr{F}$ の脆弱分解をとればよい．但し，ここで $f: \mathscr{F} \oplus \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ を $f(x, y) = x + y$

により定義した. (補題2の証終)

定理の証明に戻ろう. $H^i(\Gamma_S(X,\mathscr{L}^*))=H^i(\Gamma_S(X,\mathscr{L}'^*))$ を示すには各々が $H^i(\Gamma_S(X,\mathscr{L}''^*))$ に等しいことを言えばよいから, 最初から

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathscr{F} & \longrightarrow & \mathscr{L}^0 & \xrightarrow{f_0} & \mathscr{L}^1 & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \mathscr{L}^{i-1} & \xrightarrow{f_{i-1}} & \mathscr{L}^i & \xrightarrow{f_i} & \mathscr{L}^{i+1} & \longrightarrow & \cdots\cdots \\
 & & \| & & \downarrow h_0 & \circlearrowright & \downarrow h_1 & & \downarrow h_{i-1} & \circlearrowright & \downarrow h_i & \circlearrowright & \downarrow h_{i+1} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathscr{F} & \longrightarrow & \mathscr{L}'^0 & \xrightarrow[f'_0]{} & \mathscr{L}'^1 & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \mathscr{L}'^{i-1} & \xrightarrow[f'_{i-1}]{} & \mathscr{L}'^i & \xrightarrow[f'_i]{} & \mathscr{L}'^{i+1} & \longrightarrow &
\end{array}$$

となる写像 $h_i(i=0,1,2,\cdots)$ が存在するとしてよい. その時,

$\mathscr{L}^i\oplus\mathscr{L}'^{i-1}\to\mathscr{L}^{i+1}\oplus\mathscr{L}'^i$ を $(x,y)\mapsto(f_i(x),\ f'_{i-1}(y)+(-1)^i h_i(x))$ として定義すると, $0\to\mathscr{L}^0\to\mathscr{L}^1\oplus\mathscr{L}'^0\to\mathscr{L}^2\oplus\mathscr{L}'^1\to\cdots$ は脆弱層の完全系列になっている. 更に

$$0\to\mathscr{L}'^i\to\mathscr{L}^{i+1}\oplus\mathscr{L}'^i\to\mathscr{L}^{i+1}\to 0$$

$(i=0,1,\cdots)$ も完全であるから命題1.1.2およびその系2により左図において縦の各列はすべて完全かつ第2行も完全である. 従って, 命題1.1.4によって

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \Gamma_S(X,\mathscr{L}'^0) \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \rightarrow & \Gamma_S(X,\ \mathscr{L}^0) & \rightarrow & \Gamma_S(X,\ \mathscr{L}^1\oplus\mathscr{L}'^0) \rightarrow \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \rightarrow & \Gamma_S(X,\mathscr{L}^0) & \rightarrow & \Gamma_S(X,\ \mathscr{L}^1) \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0
\end{array}$$

$$0\longrightarrow H^0(\Gamma_S(X,\mathscr{L}^*))\to H^0(\Gamma_S(X,\mathscr{L}'^*))\to 0\to H^1(\Gamma_S(X,\mathscr{L}^*))\longrightarrow\cdots$$

なる完全系列を得る. 従って $H^i(\Gamma_S(X,\mathscr{L}^*))\cong H^i(\Gamma_S(X,\mathscr{L}'^*))$ を得る. (証終)

定義 1.1.15. $\mathscr{F}$ を位相空間 X 上の層, S を X の局所閉集合とする時, X 上の層 $\mathscr{H}^j_S(\mathscr{F})$ $(j=0,1,2,\cdots)$ を

$$\mathscr{H}^j_S(\mathscr{F})\underset{\text{def}}{=}\mathscr{H}^j(\Gamma_S(\mathscr{L}^*))=\frac{\mathrm{Ker}(\Gamma_S(\mathscr{L}^j)\to\Gamma_S(\mathscr{L}^{j+1}))}{\mathrm{Im}(\Gamma_S(\mathscr{L}^{j-1})\to\Gamma_S(\mathscr{L}^j))}$$

として定義する. $\mathscr{H}^j_S(\mathscr{F})$ を S に台をもつ $\mathscr{F}$ の j 次**導来層** (the j-th derived sheaf of $\mathscr{F}$ with support in S) と呼ぶ*).

$\mathscr{H}^j_S(\mathscr{F})$ は X の開集合 U に対して $H^j_{S\cap U}(U,\mathscr{F})$ を対応させて得られる前層に付随した層である. しかしある条件のもとではこの前層自身が層を定める. 即ち:

*) 佐藤 [1] は $\mathscr{H}^j_S(\mathscr{F})$ と $\mathscr{D}ist^j\ (S,\mathscr{F})$ と記し $\mathscr{F}$ の j 次分布の層 (the sheaf of j-distributions of $\mathscr{F}$) と呼んでいる. よい記号だと思うが, ここでは最近の慣例に従う. 第2章§3で導入する "一般化された相対コホモロジー群" に対しては (慣例がないので) 佐藤 [1] の記号に近い記法を用いる. 次章第3節 (定義 2.3.2 参照)

なお定義から明らかに $\mathscr{H}^j_S(\mathscr{F})_x=0\ (x\notin S)$ が成り立つから, $\mathscr{H}^j_S(\mathscr{F})$ は実質的には S 上の層である. 従って以後 $\mathscr{H}^j_S(\mathscr{F})|_S$ を $\mathscr{H}^j_S(\mathscr{F})$ と略記することが多い.

命題 1.1.5. $\mathscr{H}^j_S(\mathscr{F})=0$ が $j<k$ なるすべての j に対して成り立つならば，$\mathscr{H}^k_S(\mathscr{F})(U)=H^k_{S\cap U}(U,\mathscr{F})$ である．

［証明］ $0\to\mathscr{F}\to\mathscr{L}^0\to\mathscr{L}^1\to\cdots$ を $\mathscr{F}$ の脆弱分解とする．仮定から $0\to\Gamma_S(\mathscr{L}^0)\to\Gamma_S(\mathscr{L}^1)\to\cdots\to\Gamma_S(\mathscr{L}^{k-1})\to\mathscr{I}\to 0$ は完全である．但し，ここで $\mathscr{I}=\mathrm{Im}(\Gamma_S(\mathscr{L}^{k-1})\to\Gamma_S(\mathscr{L}^k))$ と定めた．

さて一般に $\mathscr{F}_1\xrightarrow{\varphi}\mathscr{F}_2$ を X 上の層の射とする時，X の開集合 U に $\mathrm{Im}\{\mathscr{F}_1(U)\xrightarrow{\varphi(U)}\mathscr{F}_2(U)\}=\mathrm{Im}(\varphi(U))$ を対応させて得られる前層の層化を $\mathrm{Im}\varphi$ と記せば，$(\mathrm{Im}\varphi)(U)\supset\mathrm{Im}(\varphi(U))$ が成立することは明らかである．従って，特に $\mathscr{I}(U)\supset\mathrm{Im}(\Gamma_{S\cap U}(U,\mathscr{L}^{k-1})\to\Gamma_{S\cap U}(U,\mathscr{L}^k))$ である．ところが命題 1.1.1 により $\Gamma_S(\mathscr{L}^k)$ は脆弱層故命題 1.1.2 の系 2 により $\mathscr{I}$ も脆弱層であり，しかも $\Gamma_S(\mathscr{L}^{k-1})(U)=\Gamma_{S\cap U}(U,\mathscr{L}^{k-1})\to\mathscr{I}(U)\to 0$ (完全)が成立する．従って $\mathscr{I}(U)=\mathrm{Im}(\Gamma_{S\cap U}(U,\mathscr{L}^{k-1})\to\Gamma_{S\cap U}(U,\mathscr{L}^k))$ を得る．一方，$0\to\mathscr{Z}\to\Gamma_S(\mathscr{L}^k)\to\Gamma_S(\mathscr{L}^{k+1})$ (完全) とすれば命題 1.1.2(1)により $\mathscr{Z}(U)=\mathrm{Ker}(\Gamma_{S\cap U}(U,\mathscr{L}^k)\to\Gamma_{S\cap U}(U,\mathscr{L}^{k+1}))$ が成り立つから $H^k_{S\cap U}(U,\mathscr{F})=\mathscr{Z}(U)/\mathscr{I}(U)$ が成立する．一方，定義から $0\to\mathscr{I}\to\mathscr{Z}\to\mathscr{H}^k_S(\mathscr{F})\to 0$ は完全系列であり，また，$\mathscr{I}$ が脆弱層であるから $0\to\mathscr{I}(U)\to\mathscr{Z}(U)\to\mathscr{H}^k_S(F)(U)\to 0$ も完全，即ち $\mathscr{H}^k_S(\mathscr{F})(U)=\mathscr{Z}(U)/\mathscr{I}(U)=H^k_{S\cap U}(U,\mathscr{F})$ を得る．

（証終）

定理 1.1.2. $\mathscr{F},\mathscr{F}',\mathscr{F}''$ を位相空間 X 上の層，U を X の開集合，S を X の局所閉集合，S' を S の閉集合とする．

(1)　$S\subset U\subset X$ ならば

$$H^j_S(X,\mathscr{F})=H^j_S(U,\mathscr{F})$$

(2)　$H^0_S(X,\mathscr{F})=\Gamma_S(X,\mathscr{F})$

(3)　$0\to H^0_{S'}(X,\mathscr{F})\to H^0_S(X,\mathscr{F})\to H^0_{S-S'}(X,\mathscr{F})\to H^1_{S'}(X,\mathscr{F})\to\cdots$

は完全，特に X の閉集合 Z に対して

$$0\to H^0_Z(X,\mathscr{F})\to H^0(X,\mathscr{F})\to H^0(X-Z,\mathscr{F})\to H^1_Z(X,\mathscr{F})\to\cdots \text{(完全)}$$

(4)　$0\to\mathscr{F}'\to\mathscr{F}\to\mathscr{F}''\to 0$　(完全) ならば

(i)　$0\to H^0_S(X,\mathscr{F}')\to H^0_S(X,\mathscr{F})\to H^0_S(X,\mathscr{F}'')\to H^1_S(X,\mathscr{F}')\to\cdots$　(完全)

(ii)　$0\to\mathscr{H}^0_S(\mathscr{F}')\to\mathscr{H}^0_S(\mathscr{F})\to\mathscr{H}^0_S(\mathscr{F}'')\to\mathscr{H}^1_S(\mathscr{F}')\to\cdots$　(完全)

［証明］ (1)　は定義 1.1.9 より明らか．

(2)：$0\to\mathscr{F}\to\mathscr{L}^0\to\mathscr{L}^1\to\cdots$ を $\mathscr{F}$ の脆弱分解とすれば

$$0\to\Gamma_S(X,\mathscr{F})\to\Gamma_S(X,\mathscr{L}^0)\to\Gamma_S(X,\mathscr{L}^1)\to\cdots$$

が完全になることより明らか.

(3): 次の可換図式を考えよう.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \Gamma_{S'}(U,\mathscr{L}^0) & \longrightarrow & \Gamma_{S'}(U,\mathscr{L}^1) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \Gamma_S(U,\mathscr{L}^0) & \longrightarrow & \Gamma_S(U,\mathscr{L}^1) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \Gamma_{S-S'}(U,\mathscr{L}^0) & \to & \Gamma_{S-S'}(U,\mathscr{L}^1) & \to & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

ここで S を相対閉集合として含む開集合 U をとれば, 上図において縦列はすべて完全故, コホモロジー群に移れば(3)の帰結を得る.

(4): $\mathscr{C}^*(\mathscr{F}')$, $\mathscr{C}^*(\mathscr{F})$, $\mathscr{C}^*(\mathscr{F}'')$ を各々 $\mathscr{F}',\mathscr{F},\mathscr{F}''$ の規準的脆弱分解とする. 各開集合 U に対して

$$0\longrightarrow\mathscr{C}^0(\mathscr{F}')(U)\to\mathscr{C}^0(\mathscr{F})(U)\to\mathscr{C}^0(\mathscr{F}'')(U)\to 0$$

が完全であることは命題 1.1.3 より明らかであるから命題1.1.2 のあとの注意により, 下図の上二行は完全, よって Nine lemma (命題 1.1.4 の系)により第三行も完全となる.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathscr{F}' & \longrightarrow & \mathscr{F} & \longrightarrow & \mathscr{F}'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathscr{C}^0(\mathscr{F}') & \to & \mathscr{C}^0(\mathscr{F}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^0(\mathscr{F}'') & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathscr{Z}^0(\mathscr{F}') & \to & \mathscr{Z}^0(\mathscr{F}) & \to & \mathscr{Z}^0(\mathscr{F}'') & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

以下同じ議論を繰返して任意の n に対し $0\to\mathscr{C}^n(\mathscr{F}')\to\mathscr{C}^n(\mathscr{F})\to\mathscr{C}^n(\mathscr{F}'')\to 0$ が完全であることがわかる. $\mathscr{C}^n(\mathscr{F}')$ は脆弱層だから命題 1.1.2 により

$$0\longrightarrow\Gamma_S(X,\mathscr{C}^n(\mathscr{F}'))\longrightarrow\Gamma_S(X,\mathscr{C}^n(\mathscr{F}))\longrightarrow\Gamma_S(X,\mathscr{C}^n(\mathscr{F}''))\longrightarrow 0$$

が任意の n に対して完全である.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \Gamma_S(X,\mathscr{C}^0(\mathscr{F}')) & \longrightarrow & \Gamma_S(X,\mathscr{C}^1(\mathscr{F}')) & \longrightarrow & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \Gamma_S(X,\mathscr{C}^0(\mathscr{F})) & \longrightarrow & \Gamma_S(X,\mathscr{C}^1(\mathscr{F})) & \longrightarrow & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \Gamma_S(X,\mathscr{C}^0(\mathscr{F}'')) & \longrightarrow & \Gamma_S(X,\mathscr{C}^1(\mathscr{F}'')) & \to & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

よって前図において縦の各列は完全となる．従って(4)の (i) を得る．

更に $\mathscr{H}^j_S(\mathscr{F})_x=\varinjlim_{U\ni x} H^j_{S\cap U}(U,\mathscr{F})$ であり，帰納的極限の操作は完全系列を完全系列に移すから(i)より(ii)が従う．

定義 1.1.16. 層 $\mathscr{F}$ の**脆弱次元** (flabby dimension) が r 以下である (flabby dim $\mathscr{F}\leqq r$) とは，

$$0\to\mathscr{F}\to\mathscr{L}^0\to\mathscr{L}^1\to\cdots\to\mathscr{L}^r\to 0 \qquad \text{(完全)}$$

となる脆弱層 $\mathscr{L}^i(0\leqq i\leqq r)$ が存在することを謂う*)．

特に flabby dim $\mathscr{F}\leqq 0$ と $\mathscr{F}$ が脆弱層であることは同値である．

定理 1.1.3. $\mathscr{F}$ を位相空間 X の上の層とする時，次の条件は同値である．

(1)　flabby dim $\mathscr{F}\leqq r$

(2)　$H^{r+1}_S(X,\mathscr{F})=0$

が X 内の任意の閉集合 S に対して成立する．

(2′)　$H^j_S(X,\mathscr{F})=0$

が任意の $j\,(>r)$ と X 内の任意の局所閉集合 S に対して成立する．

(3)　$\mathscr{H}^{r+1}_S(\mathscr{F})=0$

が X 内の任意の閉集合 S に対して成立する．

(4)　$H^r(X,\mathscr{F})\longrightarrow H^r(U,\mathscr{F})$

が X 内の任意の開集合 U に対して全射である．

［証明］ (1)→(2′)→(2)および (1) → (3) は定義より明らかである．(2) → (4)→(1) および (3)→(1) を順次示そう．

(2)→(4)：定理 1.12 の (3) において $S=X$，$S'=X-U$ とすれば

$$\cdots\to H^r(X,\mathscr{F})\longrightarrow H^r(U,\mathscr{F})\longrightarrow H^{r+1}_{X-U}(X,\mathscr{F})\to\cdots \qquad \text{(完全)}$$

を得る．他方，(2) より $H^{r+1}_{X-U}(X,\mathscr{F})=0$．従って(4)を得る．

(4)→(1)：$0\to\mathscr{F}\to\mathscr{L}^0\xrightarrow{f_0}\mathscr{L}^1\xrightarrow{f_1}\cdots\to\mathscr{L}^{r-1}\xrightarrow{f_{r-1}}\mathscr{L}^r\to\cdots$ を $\mathscr{F}$ の脆弱分解とする．今 $\mathscr{G}=\mathrm{Im}\,f_{r-1}(=f_{r-1}(\mathscr{L}^{r-1}))$ と定めれば $0\to\mathscr{F}\to\mathscr{L}^0\to\mathscr{L}^1\to\cdots\to\mathscr{L}^{r-1}\to\mathscr{G}\to 0$ (完全) が得られるから，$\mathscr{G}$ が脆弱層であることを示せばよい．$0\to\mathscr{G}\to\mathscr{L}^r\to\mathscr{L}^{r-1}\to\cdots$ は完全系列だから

$$H^r(U,\mathscr{F})=\frac{\mathrm{Ker}(\mathscr{L}^r(U)\to\mathscr{L}^{r+1}(U))}{\mathrm{Im}(\mathscr{L}^{r-1}(U)\to\mathscr{L}^r(U))}=\frac{\mathscr{G}(U)}{f_{r-1}(U)\mathscr{L}^{r-1}(U)}$$

---

*)　この時，$\mathscr{F}$ は長さ r_0 の脆弱分解を持つ，とも言う．

他方，仮定より

$$\frac{\mathcal{G}(X)}{f_{r-1}(X)\mathcal{L}^{r-1}(X)} \longrightarrow \frac{\mathcal{G}(U)}{f_{r-1}(U)\mathcal{L}^{r-1}(U)}$$

が全射的故，$u\in\mathcal{G}(U)$ に対し $u=\tilde{u}|_U+f_{r-1}(U)s$ となる $\tilde{u}\in\mathcal{G}(X)$ と $s\in\mathcal{L}^{r-1}(U)$ が存在する．然るに $\mathcal{L}^{r-1}$ は脆弱層だから，$f_{r-1}(U)s=f_{r-1}(U)(\tilde{s}|_U)=f(X)\tilde{s}|_U$ が成立するように $\tilde{s}\in\mathcal{L}^{r-1}(X)$ を選ぶことができる．そうすれば $u=(\tilde{u}+f(X)\tilde{s})|_U$ となる．これは $\mathcal{G}$ が脆弱層であることを意味する．

(3)→(1)：r に関する帰納法で証明する．まず $r=0$ で成り立つことを示そう．即ち任意の閉集合 S について $\mathcal{H}^1_S(\mathcal{F})=0$ ならば $\mathcal{F}$ が脆弱層であることを示す．U_0 を X の開集合として $s_0\in\mathcal{F}(U_0)$ を一つとる．今，集合 $\mathcal{M}=\{(U',s')\mid U'\supset U_0,\ s\in\mathcal{F}(U'),\ s|_{U_0}=s_0\}$ に順序関係 $(U,s)>(U',s')$ を，$U\supset U'$ かつ $s|_{U'}=s'$ が成り立つ時，かつその時に限り $(U,s)>(U',s')$，として定めよう．この順序に関して $\mathcal{M}$ は帰納的順序集合になるから，Zorn の補題により極大元 (U_1,s_1) が存在する．$U_1=X$ を示そう．$U_1\neq X$ だったとして $x\in X-U_1$ を一つとろう．$S=X-U_1$ に対して仮定から $\mathcal{H}^1_S(\mathcal{F})_x=\varinjlim_{x\in V} H^1_{S\cap V}(V,\mathcal{F})=0$ が成立する．一方，定理 1.1.2 の (3) より，x を含む任意の開集合 V に対し

$$0\to H^0_{V\cap S}(V,\mathcal{F})\to H^0(V,\mathcal{F})\to H^0(V-S,\mathcal{F})\to H^1_{S\cap V}(V,\mathcal{F}) \qquad (完全)$$

が成立する．ここで各項の帰納的極限をとって考えれば，十分小さい V に対して $\tilde{s}|_{V-S}=s_1|_{V\cap U_1}$ となる，$\tilde{s}\in H^0(V,\mathcal{F})(=\mathcal{F}(V))$が存在する．よって $s_2|_V=\tilde{s}$，$s_2|_{U_1}=s_1$ として s_2 を定めれば $(U_1\cup V,s_2)$は $\mathcal{M}$ の元となりこれは (U_1,s_1) の極大性に反する．よって $s_1\in\mathcal{F}(X)$ があって $s_1|_{U_0}=s_0$ となる．従って $\mathcal{F}$ は脆弱層である．

次に $r=r_0$ の時成り立つとして $r=r_0+1$ の時を証明しよう．今，$0\to\mathcal{F}\to\mathcal{L}^0\to\mathcal{G}\to 0$ が完全かつ $\mathcal{L}^0$ が脆弱層となるように $\mathcal{L}^0$ を選ぼう．すると定理 1.1.2 の (4)により

$$0=\mathcal{H}^{r_0}_S(\mathcal{L}^0)\to\mathcal{H}^{r_0}_S(\mathcal{G})\to\mathcal{H}^{r_0+1}_S(\mathcal{F})\to\mathcal{H}^{r_0+1}_S(\mathcal{L}^0)=0 \qquad (完全)$$

が成り立つから $\mathcal{H}^{r_0+1}_S(\mathcal{F})=0$ ならば $\mathcal{H}^{r_0}_S(\mathcal{G})=0$ である．従って帰納法の仮定により

$$0\to\mathcal{G}\to\mathcal{L}^1\to\mathcal{L}^2\to\cdots\to\mathcal{L}^{r_0+1}\to 0 \qquad (完全)$$

となる脆弱分解が存在する．そうすれば明らかに

$$0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{L}^0 \to \mathscr{L}^1 \to \cdots \to \mathscr{L}^{r_0+1} \to 0$$

は $\mathscr{F}$ の求める長さ r_0+1 の脆弱分解である. (証終)

定義 1.1.17. $\mathscr{F}$ を位相空間 X 上の層, S を X の閉集合とする時, S が $\mathscr{F}$ に関して**純 r 余次元的** (purely r-codimensional) とは

$$\mathscr{H}^j_S(\mathscr{F})=0 \ (j \neq r)$$

となることを謂う.

定義 1.1.18. X を位相空間, A を加群とする時, X の開集合 U に対して $A_X(U)=\{U$ から A への写像で局所的には一定のもの, 即ち, A に離散位相をいれた時の連続写像, の全体$\}$ を対応させて得られる層 A_X を, X 上の A を茎とする**定数層** (constant sheaf) という. 明らかに各 $x \in X$ について $(A_X)_x=A$ である.

定義 1.1.19. $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ を位相空間 X のの層とする時, X の開集合 U に $\mathscr{F}(U) \underset{\boldsymbol{Z}}{\otimes} \mathscr{G}(U)$ を対応させて得られる前層に付随した層を $\mathscr{F} \underset{\boldsymbol{Z}}{\otimes} \mathscr{G}$ と記す. この時 $(\mathscr{F} \underset{\boldsymbol{Z}}{\otimes} \mathscr{G})_x = \mathscr{F}_x \underset{\boldsymbol{Z}}{\otimes} \mathscr{G}_x$ が成り立つ. また, $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ が $\underset{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{C}}$ 係数ベクトル空間の層である時, $\mathscr{F} \underset{\boldsymbol{C}}{\otimes} \mathscr{G}$ も同様に定義する. 特に, $(\mathscr{F} \underset{\boldsymbol{C}}{\otimes} \mathscr{G})_x = \mathscr{F}_x \underset{\boldsymbol{C}}{\otimes} \mathscr{G}_x$ が成り立つ. 以下, 文脈から明らかな場合は $\underset{\boldsymbol{Z}}{\otimes}$ 及び $\underset{\boldsymbol{C}}{\otimes}$ を単に $\otimes$ と略記する.

さて以上で層とコホモロジー群について基礎的な準備が終わったので, 次に実解析的多様体 M の上の超函数の層 $\mathscr{B}_M$ を定義しよう. まずその準備としていくつかの言葉を準備する.

定義 1.1.20. M を n 次元実解析的多様体とする. X が M を含む n 次元複素多様体で局所的には $M \cong \boldsymbol{R}^n \hookrightarrow \boldsymbol{C}^n \cong X$ となっている時, X を M の**複素化** (complexification) と謂う. 即ち, X の各点 x に対しある近傍 Ω が存在して, $\Omega \cap M = f^{-1}(\boldsymbol{R}^n)$ となるような $\Omega \to \boldsymbol{C}^n$ なる一対一の正則写像 (holomorphic map) f が存在する. これは M が X の実解析的部分多様体でありかつ $x \in M$ に対して $T_xX = T_xM \oplus \sqrt{-1}\,T_xM$ となることと同値である. 但し T_xM により M の x における接空間を表わす.

注意. M がパラコンパクト (paracompact) ならば, その複素化 X は次の意味で一意的に存在することが知られている.

X_1, X_2 が M の複素化ならば, M の複素化 X_3 でしかも X_3 は X_1, X_2 の

開集合となるものが存在する.(例えば Bruhat-Whitney [1] 参照)

定義 1.1.21. $\boldsymbol{Z}_X$ を X 上の $\boldsymbol{Z}$ (=有理整数環)を茎とする定数層とする. n 次元(実解析的)多様体 M 上の**向き付け層** (orientation sheaf) ω_M を $\omega_M = \mathscr{H}^n_M(\boldsymbol{Z}_X)$ として定義する. 開集合 U が向き付けられている (oriented) ならば $\omega_M(U) \cong \boldsymbol{Z}_M(U)$ であるが (§2 を見よ), この同型の符号が向き付けに依存する. ω_M の断面を与えることと**向き付け**を与えることとは同値である.

定義 1.1.22. X を複素多様体とする時, $\mathcal{O}_X$ で X 上の正則函数全体の作る層を表わす. 即ち, X の開集合 U に $\mathcal{O}_X(U) = \{U$ 上で定義された正則函数全体$\}$ を対応させて得られる層である.

定義 1.1.23. M を n 次元実解析的多様体, X をその複素化, $\mathcal{O}_X$ を X 上の正則函数のなす層, ω_M を M 上の orientation sheaf とする. その時, M 上の**超函数** (hyperfunction) の層 $\mathcal{B}_M$ を $\mathscr{H}^n_M(\mathcal{O}_X) \underset{\boldsymbol{Z}}{\otimes} \omega_M$ で定義し, その断面を超函数とよぶ.

M が向き付けられていれば $\omega_M = \boldsymbol{Z}_M$ 故 $\mathcal{B}_M = \mathscr{H}^n_M(\mathcal{O}_X) \otimes \omega_M = \mathscr{H}^n_M(\mathcal{O}_X)$ である. 従って, M が $\mathcal{O}_X$ に関して純 n 余次元的 (定義 1.1.17) であること(第2章で証明する)を認めれば命題 1.1.5 により $\mathcal{B}_M$ の $U(\subset M)$ 上の断面は U を閉集合として含む X の開集合 X_U を用いて $H^n_U(X_U, \mathcal{O}_X)$ となることがわかる. 次節で更に $H^n_U(X_U, \mathcal{O}_X)$ を Čech のコホモロジー群を用いて具体的に調べ超函数が正則函数の境界値として表わせることを示そう.

最後に $\mathcal{B}_M$ が脆弱層であると云う著しい事実を証明してこの節を終わる. まず命題 1.1.5 を一般化しておこう.

命題 1.1.6. $\mathscr{F}$ を位相空間 X 上の層, S および $Z(\subset S)$ を X の閉集合とする. S が $\mathscr{F}$ に関して純 k 余次元的(即ち $\mathscr{H}^j_S(\mathscr{F}) = 0$ $(j \neq k)$) ならば.

$$H^j_Z(X, \mathscr{H}^k_S(\mathscr{F})) = H^{j+k}_Z(X, \mathscr{F}), \qquad j = 0, 1, 2, \cdots$$

が成立する.

[証明] $\Gamma_Z(X, \Gamma_S(\mathscr{L}^i)) = \Gamma_Z(X, \mathscr{L}^i)$ に注意すれば, $j=0$ の場合は既に命題 1.1.5 で証明されている. 以下, 記号は命題 1.1.5 に用いたものとする. $0 \to \mathscr{I} \to \mathscr{Z} \to \mathscr{H}^k_S(\mathscr{F}) \to 0$ なる完全系列において $\mathscr{I}$ が脆弱層故, 定理 1.1.2 の(4)により

$$0 = H^1_Z(X, \mathscr{I}) \to H^1_Z(X, \mathscr{Z}) \to H^1_Z(X, \mathscr{H}^k_S(\mathscr{F})) \to H^2_Z(X, \mathscr{I}) = 0 \to \cdots \quad (完全)$$

が得られる. 従って $H^j_Z(X, \mathscr{H}^k_S(\mathscr{F})) = H^j_Z(X, \mathscr{Z})$ $(j \geqq 1)$ である. 一方, 仮定よ

り $j>k$ ならば $\mathcal{H}^j_S(\mathcal{F})=0$ であるから

$$0\longrightarrow\mathcal{Z}\longrightarrow\Gamma_S(\mathcal{L}^k)\longrightarrow\Gamma_S(\mathcal{L}^{k+1})\to\cdots$$

が $\mathcal{Z}$ の脆弱分解になっている．従って

$$H^j_Z(X,\mathcal{Z})=\frac{\mathrm{Ker}(\Gamma_Z(X,\mathcal{L}^{j+k})\to\Gamma_Z(X,\mathcal{L}^{j+k+1}))}{\mathrm{Im}(\Gamma_Z(X,\mathcal{L}^{j+k-1})\to\Gamma_Z(X,\mathcal{L}^{j+k}))}=H^{j+k}_Z(X,\mathcal{F})$$

即ち

$$H^j_Z(X,\mathcal{H}_S{}^k(\mathcal{F}))=H^{j+k}_Z(X,\mathcal{F})$$

を得る．　(証終)

さてここで多変数函数論で基本的な次の定理を証明抜きで引用しておこう．

定理 1.1.4. (Malgrange [1])　X を複素多様体，$\mathcal{O}_X$ を X 上の正則函数のなす層とする．その時

$$\text{flabby dim } \mathcal{O}_X\leqq\dim X\text{*)}$$

さて n 次元実解析的多様体 M はその複素化 X 上の層 $\mathcal{O}_X$ に関して純 n 余次元的である(次章第2節定理 2.2.1) ことを用いれば，命題 1.1.6 により M の任意の閉集合 Z に対して

$$H^1_Z(X,\mathcal{H}^n_M(\mathcal{O}_X))=H^{n+1}_Z(X,\mathcal{O}_X)$$

が成り立つ．従って定理 1.1.3 と定理 1.1.4 により，これは消滅する．従って再び定理 1.1.3 により flabby dim $\mathcal{H}^n_M(\mathcal{O}_X)\leqq 0$，即ち$\mathcal{H}^n_M(\mathcal{O}_X)$ は脆弱層である．今 $M=\bigcup_{i\in I}U_i$，U_i は向き付け可能な開集合とすれば，前述のように $\mathcal{B}_M|_{U_i}=\mathcal{H}^n_M(\mathcal{O}_X)|_{U_i}$ であるから，一般に $\mathcal{F}$ を M 上の層，$M=\bigcup_{i\in I}U_i$ を M の開被覆とした時 $\mathcal{F}$ が脆弱層であることと，すべての $i\in I$ に対し $\mathcal{F}|_{U_i}$ が脆弱層であることが同値であることを言えば，$\mathcal{B}_M$ の脆弱性が証明される．然るにこれは定理 1.1.3 より明らかである．実際，定理 1.1.3 は flabby dim $\mathcal{F}\leqq r$ であることと，任意の閉集合 S に対して $\mathcal{H}^{r+1}_S(\mathcal{F})=0$ であることが同値であることを示しており，他方 $\mathcal{H}^{r+1}_S(\mathcal{F})$ は層であるからそれが 0 であることは局所的な性質である．即ち，$\mathcal{H}^{r+1}_S(\mathcal{F})=0$ と各 $U_i(i\in I)$ に対して $\mathcal{H}^{r+1}_S(\mathcal{F})|_{U_i}=0$ は同値である．

従って次の定理を得る．

定理 1.1.5.　実解析的多様体 M 上の超函数のなす層 $\mathcal{B}_M$ は脆弱層である．

---

*)　§2 の議論から容易にわかるように，実は等号が成り立つ．

この事実と線型微分方程式系の一般論を合わせて用いると，定数層 $\boldsymbol{C}_M$ および，正則函数の層 $\mathcal{O}_X$ の脆弱分解を具体的に微分作用素を用いて与えることができる(小松[1])．これは解析的に極めて重要かつ興味深い結果である．

問 1.　$\boldsymbol{R}^n$ の開集合 U に U 上で連続かつ有界な函数の全体を対応させると前層が得られるが層にはならない．その層化を求めよ．

問 2.　$\boldsymbol{R}^n$ の開集合 U に，U 上の実数値局所定数函数を定数函数を法としたものを対応させると前層が得られるが層にはならない．その層化を求めよ．

問 3.　X, Y を位相空間，$f: X\to Y$ を連続写像とする．

(1)　$0\to\mathcal{F}'\to\mathcal{F}\to\mathcal{F}''$ が X 上の層の完全系列なら $0\to f_*\mathcal{F}'\to f_*\mathcal{F}\to f_*\mathcal{F}''$ も完全である．

(2)　$\mathcal{F}$ が X 上の脆弱層なら $f_*\mathcal{F}$ は Y 上の脆弱層である．

(3)　$\mathcal{G}'\to\mathcal{G}\to\mathcal{G}''$ が Y 上の層の完全系列ならば $f^{-1}\mathcal{G}'\to f^{-1}\mathcal{G}\to f^{-1}\mathcal{G}''$ も完全である．

問 4.

$$\left.\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & A' & & A & & A'' \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & K' & \longrightarrow & K & \longrightarrow & K'' \to 0 \\ & & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ 0 & \to & L' & \longrightarrow & L & \longrightarrow & L'' \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & C' & & C & & C'' \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}\right\}\text{完全}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{完全}}$$

左の図において縦列はすべて完全，K 行と L 行も完全とする．その時 $A'\to A\to A''\to C'\to C\to C''$ なる写像が自然に定義できて，しかも完全系列になることを示せ．

§2.　超函数を正則函数の境界値としてとらえること

Orientation sheaf $\omega_M=\mathcal{H}^n_M(\boldsymbol{Z}_X)$ および超函数の層 $\mathcal{B}_M=\mathcal{H}^n_M(\mathcal{O}_X)\otimes\omega_M$ の断面をチェック (Čech) のコホモロジー群 (即ち開被覆を用いてのコホモロジー群) を用いて調べよう．これは超函数の具体的描像を得るのに有益であろう．事実，佐藤先生は一変数の超函数の“テンソル積”として多変数の超函数の概念を形成される際，まず最初は被覆を用いての相対コホモロジー群に (多分そうとは意識されることなく“自然”に) 逢着され，それの定式化の為に相対コホモ

ロジー群の概念を (Grothendieck[1] とは独立に) 導入されたものと思われる.

X を位相空間, Z をその閉集合, $X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ および $X-Z=\bigcup_{\lambda\in\Lambda'}U_\lambda$ $(\Lambda'\subset\Lambda)$ をそれぞれ X, $X-Z$ の開被覆とする. $\mathcal{U}=\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ および $\mathcal{U}'=\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda'}$ と記号を定める. この時 X 上の層 $\mathcal{F}$ に対して Čech のコホモロジー群を次のように定める. まず

$$C^k(\mathcal{U},\mathcal{F})\underset{\text{def}}{=}\{\varphi=\{\varphi_{\lambda_0,\cdots,\lambda_k}\}_{(\lambda_0,\cdots,\lambda_k)\in\Lambda^{k+1}}\,|\,\varphi_{\lambda_0\cdots\lambda_k}\in\Gamma(U_{\lambda_0}\cap\cdots\cap U_{\lambda_k},\mathcal{F})$$
$$\text{かつ}\ \varphi_{\lambda_0,\cdots,\lambda_k}=-\varphi_{\lambda_0,\cdots,\lambda_{i+1},\lambda_i,\cdots,\lambda_k}\}$$

とおけば, もちろん

$$C^k(\mathcal{U},\mathcal{F})\subset\bigoplus_{(\lambda_0,\cdots,\lambda_k)\in\Lambda^{k+1}}\Gamma(U_{\lambda_0}\cap\cdots\cap U_{\lambda_k},\mathcal{F})$$

である. また,

$$C^k(\mathcal{U}\bmod\mathcal{U}',\mathcal{F})=\{\varphi=\{\varphi_{\lambda_0,\cdots,\lambda_k}\}_{(\lambda_0,\cdots,\lambda_k)\in\Lambda^{k+1}}\in C^k(\mathcal{U},\mathcal{F})\,|$$
$$(\lambda_0,\cdots,\lambda_k)\in\Lambda'^{k+1}\ \text{ならば}\ \varphi_{\lambda_0,\cdots,\lambda_k}=0\}$$

とおく. さて

$$C^k(\mathcal{U},\mathcal{F})\xrightarrow{\delta}C^{k+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

なる写像 δ を

$$\delta(\{\varphi_{\lambda_0,\cdots,\lambda_k}\})=\{\phi_{\lambda_0,\cdots,\lambda_{k+1}}\}_{(\lambda_0,\cdots,\lambda_{k+1})\in\Lambda^{k+2}}\ \text{但し}$$
$$\phi_{\lambda_0,\cdots,\lambda_{k+1}}=\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i\varphi_{\lambda_0\cdots,\lambda_{i-1},\lambda_{i+1},\cdots,\lambda_{k+1}}|_{U_{\lambda_0}\cap\cdots\cap U_{\lambda_{k+1}}},$$

として定義すると $\delta^2=0$ が満たされる. これによって得られる複体

$$0\longrightarrow C^0(\mathcal{U},\mathcal{F})\xrightarrow{\delta}C^1(\mathcal{U},\mathcal{F})\longrightarrow\cdots$$

を $C^*(\mathcal{U},\mathcal{F})$ と記す. この複体を用いて**チェックのコホモロジー群** $H^k(\mathcal{U},\mathcal{F})$, $H^k(\mathcal{U}\bmod\mathcal{U}',\mathcal{F})$ を次のように定義する.

定義 1.2.1. $H^k(\mathcal{U},\mathcal{F})\underset{\text{def}}{=}H^k(C^*(\mathcal{U},\mathcal{F}))=\dfrac{\operatorname{Ker}(C^k(\mathcal{U},\mathcal{F})\xrightarrow{\delta}C^{k+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}))}{\operatorname{Im}(C^{k-1}(\mathcal{U},\mathcal{F})\xrightarrow{\delta}C^k(\mathcal{U},\mathcal{F}))}$

$$H^k(\mathcal{U}\bmod\mathcal{U}',\mathcal{F})\underset{\text{def}}{=}H^k(C^*(\mathcal{U}\bmod\mathcal{U}',\mathcal{F}))=$$
$$=\frac{\operatorname{Ker}(C^k(\mathcal{U}\bmod\mathcal{U}',\mathcal{F})\xrightarrow{\delta}C^{k+1}(\mathcal{U}\bmod\mathcal{U}',\mathcal{F}))}{\operatorname{Im}(C^{k-1}(\mathcal{U}\bmod\mathcal{U}',\mathcal{F})\xrightarrow{\delta}(C^k(\mathcal{U}\bmod\mathcal{U}',\mathcal{F}))}$$

さて各 $k\geqq0$ に対して

$$0\longrightarrow C^k(\mathcal{U}\bmod\mathcal{U}',\mathcal{F})\longrightarrow C^k(\mathcal{U},\mathcal{F})\longrightarrow C^k(\mathcal{U}',\mathcal{F})\longrightarrow0\qquad(\text{完全})$$

であるからコホモロジー群の完全系列

$$0\longrightarrow H^0(\mathcal{U}\bmod\mathcal{U}',\mathcal{F})\longrightarrow H^0(\mathcal{U},\mathcal{F})\longrightarrow H^0(\mathcal{U}',\mathcal{F})\longrightarrow H^1(\mathcal{U}\bmod\mathcal{U}',\mathcal{F})\longrightarrow\cdots$$

が得られる．ここで我々は，任意の $k\neq 0$ と任意の $\lambda_0,\cdots,\lambda_r$ に対して

$$H^k(U_{\lambda_0}\cap\cdots\cap U_{\lambda_r},\mathcal{F})=0$$

が成り立つならば

$$H^k_Z(X,\mathcal{F})\cong H^k(\mathcal{U}\mathrm{mod}\,\mathcal{U}',\mathcal{F})$$

が成立することを主張するルレイ (Leray) の定理を証明しよう．これによって $\mathcal{B}_M$ の断面の具体的表現を求めることができる．まずいくつかの補題を準備しよう．

補題 1.　$H^0(\mathcal{U}\mathrm{mod}\,\mathcal{U}',\mathcal{F})=\Gamma_Z(X,\mathcal{F})(=H^0_Z(X,\mathcal{F}))$

［証明］　定義により

$$H^0(\mathcal{U}\mathrm{mod}\,\mathcal{U}',\mathcal{F})=\{\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\in C^0(\mathcal{U}\mathrm{mod}\,\mathcal{U}',\mathcal{F})\,|\,\delta(\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})=0\}$$

であり，

$$\delta(\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})=\{(\varphi_\mu|_{U_\lambda\cap U_\mu}-\varphi_\lambda|_{U_\lambda\cap U_\mu})\}_{(\lambda,\mu)\in\Lambda^2}$$

であるから層の定義により $\varphi\in\Gamma(X,\mathcal{F})$ で $\varphi|_{U_\lambda}=\varphi_\lambda$ となるものが唯一つ存在する．然るに $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\in C^0(\mathcal{U}\ \mathrm{mod}\,\mathcal{U}',\mathcal{F})$ 故，特に $\varphi|_{X-Z}=0$. 故に $\varphi\in\Gamma_Z(X,\mathcal{F})$ である. 逆に $\varphi\in\Gamma_Z(X,\mathcal{F})$ に対し $\{\varphi|_{U_\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda}\in H^0(\mathcal{U}\mathrm{mod}\,\mathcal{U}',\mathcal{F})$ は明らか．（証終）

補題 2.　$\mathcal{F}$ が脆弱層ならば $H^k(\mathcal{U}\mathrm{mod}\,\mathcal{U}',\mathcal{F})=0\quad(k\neq 0)$.

［証明］　定理 1.1.2 の (2), (3) により

$$0\to\Gamma_Z(X,\mathcal{F})\to\Gamma(X,\mathcal{F})\to\Gamma(X-Z,\mathcal{F})\to H^1_Z(X,\mathcal{F})$$

は完全系列であるが，$\mathcal{F}$ は脆弱層故定理 1.1.3 により $H^1_Z(X,\mathcal{F})=0$ である．また，補題 1 を使えば

$$0\longrightarrow\Gamma_Z(X,\mathcal{F})\longrightarrow\Gamma(X,\mathcal{F})\longrightarrow\Gamma(X-Z,\mathcal{F})\longrightarrow H^1(\mathcal{U}\mathrm{mod}\,\mathcal{U}',\mathcal{F})\to$$
$$\to H^1(\mathcal{U},\mathcal{F})\longrightarrow H^1(\mathcal{U}',\mathcal{F})\longrightarrow H^2(\mathcal{U}\mathrm{mod}\,\mathcal{U}',\mathcal{F})\longrightarrow\cdots$$

なる完全系列が得られる．然るに，以下に示すように，$H^1(\mathcal{U},\mathcal{F})=0$ が成立するから，これは $H^1(\mathcal{U}\mathrm{mod}\,\mathcal{U}',\mathcal{F})=0$ を意味する．又 $H^k(\mathcal{U}\mathrm{mod}\,\mathcal{U}',\mathcal{F})=0$ $(k\geqq 2)$ は $H^k(\mathcal{U},\mathcal{F})=0$ $(k\geqq 1)$ かつ $H^k(\mathcal{U}',\mathcal{F})=0$ $(k\geqq 1)$ から自明に従う．よって $H^k(\mathcal{U},\mathcal{F})=0$ $(k\geqq 1)$, (従って $H^k(\mathcal{U}',\mathcal{F})=0$ $(k\geqq 1)$) を証明すれば十分である．それには，定義により $f=\{f_{\lambda_0\cdots\lambda_k}\}\in C^k(\mathcal{U},\mathcal{F})$, $\delta f=0$ ならば $\delta g=f$ となる $g=\{g_{\lambda_0\cdots\lambda_{k-1}}\}\in C^{k-1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ が存在することを示せばよい．さて $\mathcal{M}$ を次の条件を満たす対 (g,U) 全体とする：

U は X の開集合で $g\in C^{k-1}(\mathcal{U}\cap U,\mathcal{F})$ かつ $\delta g=f|_U$，ただし $\mathcal{U}\cap U=$

$\{U_\lambda \cap U\}$ と定め $f|_U$ は $C^k(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \to C^k(\mathcal{U} \cap U, \mathscr{F})$ による f の像とする．まず $\mathcal{M} \neq \phi$ を示そう．実際，$h_{\lambda_0 \cdots \lambda_{k-1}} \underset{\text{def}}{=} f_{\lambda\lambda_0 \cdots \lambda_{k-1}} \in \Gamma(U_\lambda \cap U_{\lambda_0} \cap \cdots \cap U_{\lambda_{k-1}}, \mathscr{F})$ と定めれば$h = \{h_{\lambda_0 \cdots \lambda_{k-1}}\}_{(\lambda_0, \cdots, \lambda_{k-1}) \in \Lambda^k} \in C^{k-1}(\mathcal{U} \cap U_\lambda, \mathscr{F})$である．$(\delta h)_{\lambda_0 \cdots \lambda_k} = \sum(-1)^i h_{\lambda_0 \cdots \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1} \cdots \lambda_k} = \sum(-1)^i f_{\lambda\lambda_0 \cdots \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1} \cdots \lambda_k}$ であり，他方仮定より $(\delta f)_{\lambda\lambda_0 \cdots \lambda_k} = f_{\lambda_0 \cdots \lambda_k} - \sum_{i=0}^{k}(-1)^i f_{\lambda\lambda_0 \cdots \lambda_{i-1} \lambda_{i+1} \cdots \lambda_k} = 0$, 従って $\delta h = f|_{U_\lambda}$ を得る．即ち $(h, U_\lambda) \in \mathcal{M}$ 故 $\mathcal{M} \neq \phi$ である．$U_1 \supset U_2$ かつ $g_1|_{U_2} = g_2$ の時 $(g_1, U_1) > (g_2, U_2)$ として $\mathcal{M}$ に順序関係を定義すると $\mathcal{M}$ は帰納的順序集合になるから，Zorn の補題により極大元が存在する．(g, U) を極大元とすれば $U = X$ となることを示そう．$U \neq X$ としよう．$x \in X - U$ とすれば $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ 故 $x \in U_\lambda$ なる U_λ が存在する．その時，前述のように $(h, U_\lambda) \in \mathcal{M}$ 故 $\delta h|_{U \cap U_\lambda} = f|_{U \cap U_\lambda} = \delta g|_{U \cap U_\lambda}$ となる．従って $\delta(h|_{U \cap U_\lambda} - g|_{U \cap U_\lambda}) = 0$.

さて，$h|_{U \cap U_\lambda} - g|_{U \cap U_\lambda} \in C^{k-1}(\mathcal{U} \cap U \cap U_\lambda, \mathscr{F})$ であるが，$k=1$ の場合，補題 1 において$Z = X$ とおけば，$h|_{U \cap U_\lambda} - g|_{U \cap U_\lambda} \in H^0(\mathcal{U} \cap U \cap U_\lambda, \mathscr{F}) = \Gamma(U \cap U_\lambda, \mathscr{F})$ となる．ここで $\mathscr{F}$ は脆弱層故 $s \in \Gamma(U_\lambda, \mathscr{F})$ であって $s|_{U_\lambda \cap U} = h|_{U \cap U_\lambda} - g|_{U \cap U_\lambda}$ となるものが存在する．$g'|_U = g$, $g'|_{U_\lambda} = h - s$ とすれば $\delta(h-s) = \delta h = f|_{U_\lambda}$ 故 $(g', U \cup U_\lambda) \in \mathcal{M}$. これは (g, U) の極大性に反する．従って $X = U$である．

$k > 1$ の場合には k に関する帰納法で証明する．帰納法の仮定 $H^{k-1}(\mathcal{U} \cap U \cap U_\lambda, \mathscr{F}) = 0$ より $s \in C^{k-2}(\mathcal{U} \cap U \cap U_\lambda, \mathscr{F})$ で $\delta s = h|_{U \cap U_\lambda} - g|_{U \cap U_\lambda}$ となるものが存在する．$\mathscr{F}$ は脆弱層故 $\tilde{s} \in C^{k-2}(\mathcal{U} \cap U_\lambda, \mathscr{F})$ であって $\tilde{s}|_{U \cap U_\lambda} = s$ となるものがある．今 $g' \in C^{k-1}(\mathcal{U} \cap (U \cup U_\lambda), \mathscr{F})$ を $g'|_U = g$, $g'|_{U_\lambda} = h - \delta\tilde{s}$ により定めれば $g|_{U \cap U_\lambda} = (h - \delta\tilde{s})|_{U \cap U_\lambda}$ 故 g' は well-defined でしかも $\delta g'|_U = \delta g|_U = f|_U$, $\delta g'|_{U_\lambda} = \delta(h - \delta\tilde{s})|_{U_\lambda} = \delta h|_{U_\lambda} = f|_{U_\lambda}$ であるから，$(g', U \cup U_\lambda) \in \mathcal{M}$ となってやはり (g, U) の極大性に矛盾する．即ち，$g \in C^{k-1}(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ かつ $\delta g = f$ である． (証終)

以上の準備の下に，我々にとって基本的なルレイ (Leray) の定理を証明しよう．

定理 1.2.1. (Leray) 任意の $j (\neq 0)$ と任意の $\lambda_0, \cdots, \lambda_r$ に対して $H^j(U_{\lambda_0} \cap \cdots \cap U_{\lambda_r}, \mathscr{F}) = 0$ が成り立つならば，各 k について

$$H^k(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', \mathscr{F}) = H^k_Z(X, \mathscr{F})$$

が成立する.

注意. この定理の条件を満たす被覆のことを**ルレイ(Leray) 被覆**と言うことがある.

［証明］ $k=0$ の時は補題1で証明したから $k\geqq 1$ とする. $0\to\mathcal{F}\to\mathcal{L}\to\mathcal{G}\to 0$ で $\mathcal{L}$ が脆弱層であるような完全系列を考える. この時 $0\to\Gamma(U_{\lambda_0}\cap\cdots\cap U_{\lambda_r},\mathcal{F})\to\Gamma(U_{\lambda_0}\cap\cdots\cap U_{\lambda_r},\mathcal{L})\to\Gamma(U_{\lambda_0}\cap\cdots\cap U_{\lambda_r},\mathcal{G})\to H^1(U_{\lambda_0}\cap\cdots\cap U_{\lambda_r},\mathcal{F})\to\cdots$ と云う完全系列を得る. また仮定より

$$0\longrightarrow C^k(\mathcal{U}\mathrm{mod}\,\mathcal{U}',\mathcal{F})\longrightarrow C^k(\mathcal{U}\mathrm{mod}\,\mathcal{U}',\mathcal{L})\longrightarrow C^k(\mathcal{U}\mathrm{mod}\,\mathcal{U}',\mathcal{G})\longrightarrow 0$$

も完全系列である. 他方, 補題1により

$$\begin{aligned}&0\longrightarrow\Gamma_Z(X,\mathcal{F})\longrightarrow\Gamma_Z(X,\mathcal{L})\longrightarrow\Gamma_Z(X,\mathcal{G})\longrightarrow H^1(\mathcal{U}\mathrm{mod}\,\mathcal{U}',\mathcal{F})\to\\&\to H^1(\mathcal{U}\mathrm{mod}\,\mathcal{U}',\mathcal{L})\longrightarrow H^1(\mathcal{U}\mathrm{mod}\,\mathcal{U}',\mathcal{G})\longrightarrow H^2(\mathcal{U}\mathrm{mod}\,\mathcal{U}',\mathcal{F})\to\\&\to H^2(\mathcal{U}\mathrm{mod}\,\mathcal{U}',\mathcal{L})\longrightarrow\cdots\end{aligned}$$

なる完全系列が得られる. 更に補題2により $H^1(\mathcal{U}\mathrm{mod}\,\mathcal{U}',\mathcal{L})=H^2(\mathcal{U}\mathrm{mod}\,\mathcal{U}',\mathcal{L})=0$ が成り立つ. 従って

$$H^k(\mathcal{U}\mathrm{mod}\,\mathcal{U}',\mathcal{F})=\begin{cases}\mathrm{Coker}(\Gamma_Z(X,\mathcal{L})\longrightarrow\Gamma_Z(X,\mathcal{G})) & (k=1)\\ H^{k-1}(\mathcal{U}\mathrm{mod}\,\mathcal{U}',\mathcal{G}) & (k>1).\end{cases}$$

同様にして, 定理1.1.3により

$$H^k_Z(X,\mathcal{F})=\begin{cases}\mathrm{Coker}(\Gamma_Z(X,\mathcal{L})\longrightarrow\Gamma_Z(X,\mathcal{G})) & (k=1)\\ H^{k-1}_Z(X,\mathcal{G}) & (k>1)\end{cases}$$

を得る. 従って $H^1(\mathcal{U}\mathrm{mod}\,\mathcal{U}',\mathcal{F})=H^1_Z(X,\mathcal{F})$ である. $k>1$ の時は k に関する帰納法による. 任意の $j(\neq 0)$ と r について

$$H^j(U_{\lambda_0}\cap\cdots\cap U_{\lambda_r},\mathcal{L})\longrightarrow H^j(U_{\lambda_0}\cap\cdots\cap U_{\lambda_r},\mathcal{G})\longrightarrow H^{j+1}(U_{\lambda_0}\cap\cdots\cap U_{\lambda_r},\mathcal{F})$$

なる完全系列が存在するが, $\mathcal{L}$ が脆弱層であるから $H^j(U_{\lambda_0}\cap\cdots\cap U_{\lambda_r},\mathcal{L})=0$. また, 仮定より $H^{j+1}(U_{\lambda_0}\cap\cdots\cap U_{\lambda_r},\mathcal{F})=0$. 従って, 任意の $j(\neq 0)$ と任意の $\lambda_0,\cdots,\lambda_r$ に対し $H^j(U_{\lambda_0}\cap\cdots\cap U_{\lambda_r},\mathcal{G})=0$ が成立する. ところが k に関する帰納法により

$$H^{k-1}(\mathcal{U}\mathrm{mod}\,\mathcal{U}',\mathcal{G})=H^{k-1}_Z(X,\mathcal{G})$$

が得られるから, 結局

$$H^k(\mathcal{U}\mathrm{mod}\,\mathcal{U}',\mathcal{F})=H^k_Z(X,\mathcal{F})$$

を得る. (証終)

この定理を超函数の層 $\mathcal{B}_M$ の場合に応用することを考えよう．

まず定理 1.2.1 の条件を満たす開被覆の存在を証明する為に，多変数函数論で最も基本的な事実をいくつか思い出しておこう．

定義 1.2.2. パラコンパクトな複素多様体 X が次の 2 つの条件 (i), (ii) を満たす時 X を **Stein 多様体**と呼ぶ．

(i) 正則凸性：$K(\subset X)$がコンパクトならば，$\hat{K}\underset{\text{def}}{=}\{p\in X \,|\, |f(p)|\leqq\sup_{x\in K}|f(x)|$ が任意の $f\in\mathcal{O}_X(X)$ に対して成り立つ$\}$ もコンパクト．但し，ここで $\mathcal{O}_X(X)$ は層 $\mathcal{O}_X$ の大域的断面の全体を表わす．

(ii) 分離条件：X の相異なる 2 点 p,q に対して X 全体で正則な函数 f (即ち $f\in\mathcal{O}_X(X)$) であって $f(p)\neq f(q)$ となるものが存在する．

例えば $\boldsymbol{C}^n$ は Stein 多様体である．X が Stein 多様体，$f(x)$ がその上の正則函数ならば，$\{x\in X\,|\,\mathrm{Im} f(x)>0\}$ 或いは $\{x\in X \,|\, |f(x)|>1\}$ も Stein 多様体，また二つの Stein 多様体の直積や共通部分も Stein 多様体，Stein 多様体の閉解析的部分多様体も Stein 多様体，またコンパクトな成分を含まない 1 次元複素多様体は Stein 多様体である．

ここでは証明はしないが次の定理は基本的である．特に定理 1.2.2 は今世紀の解析学最高の成果の一つとも言えるものである．

定理 1.2.2. (岡-Cartan) X が Stein 多様体ならば，任意の $i>0$ に対し $H^i(X,\mathcal{O}_X)=0$.

定理 1.2.3. (Grauert [1]) パラコンパクト実解析多様体は Stein 多様体からなる複素近傍をもつ．

これ等の証明については例えば一松 [1] を参照されたい．

さて M を n 次元実解析的多様体，X をその複素化としよう．U を M の開部分集合であって向き付けられているとすれば，$\omega_M|_U=\boldsymbol{Z}_U$(=$\boldsymbol{Z}$ を茎とする U 上の定数層) だから U 上では $\mathcal{B}_M\cong\mathcal{H}^n_M(\mathcal{O}_X)$ である．従って §1 で述べたように U を閉集合として含む X の開集合 Ω に対し $\mathcal{B}_M(U)=H^n_U(\Omega,\mathcal{O}_X)$ である．更に，定理 1.2.3 により Ω は Stein 多様体としておいて構わない．

さて M 上に $(n+1)$ 個の実解析函数 $f_0,\cdots,f_n$ があって

(1) f_j は M 上で実 $(0\leqq j\leqq n)$

(2) 各点 $x\in M$ に対して $df_0(x),\cdots,df_n(x)\ (\in T_x^*M)$ の凸包，即ち

$\{\sum_{i=0}^{n}t_idf_i(x)\ \ \sum_{i=0}^{n}t_i=1,\ t_i\geqq 0\}$，は T_x^*M の原点の近傍

の二条件を満たすとしよう．例えば $M=\boldsymbol{R}^n$ の場合 $\xi_0,\cdots,\xi_n(\in M)$ の凸包が原点の近傍ならば $f_j=\langle\xi_j,x\rangle$ とすればよい． さて $V_j=\{z\in\Omega\,|\,\mathrm{Im}f_j>0\}$ $(j=0,1,\cdots,n)$ とおくと，これは Stein 多様体で，U 上では $\mathrm{Im}f_j=0$ 故 $(\bigcup_{j=0}^{n}V_j)\cap U=\phi$ となる．

補題 1. $(\bigcup_{j=1}^{n}V_j)\cup U$ は U の近傍である．

［証明］ $x_0\in U$ に十分近い点 $x+\sqrt{-1}\,y$ が $\bigcup_{j=0}^{n}V_j$ に属さなければ $y=0$, 即ち$x\in U$,になることを示せばよい．$f_j(x+\sqrt{-1}y)=f_j(x)+\sqrt{-1}\langle y,df_j(x)\rangle$ $+(y$ に関して2次以上の項)と Taylor 展開すれば y は十分小さいとしているから， $x+\sqrt{-1}\,y\notin V_j$ より $\langle y,df_j(x)\rangle\leqq 0$ を得る．これが各 j について言える．他方 $y\neq 0$ ならば，$df_j(0\leqq j\leqq n)$ の凸包が原点の近傍故適当な $t_j(\sum_{j=0}^{n}t_j=1,\ t_j\geqq 0)$ をとれば $\langle y,\ \sum_{j=0}^{n}t_jdf_j(x)\rangle>0$ が成り立つ．然るに，上に見たように今，$\langle y,\ \sum_{j=0}^{n}t_jdf_j(x)\rangle=\sum_{j=0}^{n}t_j\langle y,df_j(x)\rangle\leqq 0$ を得る．従ってこれは矛盾である． (証終)

さて定理 2.1.3 により U は Stein 多様体からなる基本近傍系をもつから U の **Stein 近傍** (Stein 多様体である近傍をこう呼ぶ) Ω' であって $(\bigcup_{j=0}^{n}V_j)\cup U\supset\Omega'$ なるものが存在する．V_j を $V_j\cap\Omega'$ でおきかえて，Ω' を改めて Ω とおけば $\Omega=(\bigcup_{j=0}^{n}V_j)\cup U$ を得る．その時 $\mathcal{V}=\{\Omega,V_0,\cdots,V_n\}$ は Ω の Stein 開被覆で $\mathcal{V}'=\{V_0,\cdots V_n\}$ は $\Omega-U$ の Stein 開被覆である．よって岡-Cartan の定理(定理 1.2.2)により任意の $j\neq 0$ と任意の $\lambda_0,\cdots,\lambda_r$ について $H^j(V_{\lambda_0}\cap\cdots\cap V_{\lambda_r},\mathcal{O}_X)=0$ が成立する．従ってルレイの定理(定理 1.2.1)により $\mathcal{B}_M(U)=H_U^n(\Omega,\mathcal{O}_X)=H^n(\mathcal{V}\bmod\mathcal{V}',\mathcal{O}_X)$ を得る．

さて定義により

$$H^n(\mathcal{V}\bmod\mathcal{V}',\mathcal{O}_X)=\frac{\mathrm{Ker}(C^n(\mathcal{V}\bmod\mathcal{V}',\mathcal{O}_X)\longrightarrow C^{n+1}(\mathcal{V}\bmod\mathcal{V}',\mathcal{O}_X))}{\mathrm{Im}(C^{n-1}(\mathcal{V}\bmod\mathcal{V}',\mathcal{O}_X)\longrightarrow C^n(\mathcal{V}\bmod\mathcal{V}',\mathcal{O}_X))}$$

であるから $C^i(\mathcal{V}\bmod\mathcal{V}',\mathcal{O}_X)$ $(i=n-1,n,n+1)$ の構造を調べてみよう．

補題 2. $C^{n+1}(\mathcal{V}\bmod\mathcal{V}',\mathcal{O}_X)=0.$

［証明］ $C^{n+1}(\mathcal{V}\bmod\mathcal{V}',\mathcal{O}_X)\to C^{n+1}(\mathcal{V},\mathcal{O}_X)$ なる写像は単射的故 $C^{n+1}(\mathcal{V},\mathcal{O}_X)=0$ を言えばよい．$C^{n+1}(\mathcal{V},\mathcal{O}_X)=\{\varphi\in\Gamma(\Omega\cap V_0\cap\cdots\cap V_n,\mathcal{O}_X)\}=\{\varphi\in\Gamma(V_0\cap\cdots\cap V_n,\mathcal{O}_X)\}$ である．ここで Ω を U の十分小さい近傍にとることによって $V_0\cap\cdots\cap V_n=\phi$ としてよいことを示そう．実際，$x+\sqrt{-1}\,y\in V_0\cap\cdots\cap V_n$ とすれば補題1と同様にして $\langle y, df_j(x)\rangle>0$ を得る．$y\neq 0$ 故適当な $t_j(\sum_j t_j=1, t_j\geqq 0)$ をとれば $\langle y, \sum_j t_j df_j(x)\rangle\leqq 0$ となり，$\langle y,\sum_j t_j df_j(x)\rangle=\sum_j t_j\langle y, df_j(x)\rangle>0$ に矛盾する．従って $C^{n+1}(\nu,\mathcal{O}_X)=0$ となる．（証終）

従って，この補題により

$$\mathcal{B}_M(U)\cong\frac{C^n(\mathcal{V}\bmod\mathcal{V}',\mathcal{O}_X)}{\mathrm{Im}(C^{n-1}(\mathcal{V}\bmod\mathcal{V}',\mathcal{O}_X)\longrightarrow C^n(\mathcal{V}\bmod\mathcal{V}',\mathcal{O}_X))}$$

を得る．

次に $C^n(\mathcal{V}\bmod\mathcal{V}',\mathcal{O}_X)$ は定義により

$\{(\varphi_{0,1,\cdots,n},\varphi_{\Omega,1,\cdots,n},\cdots,\varphi_{\Omega,0,1\cdots,n-1})\in\mathcal{O}(\bigcap_j V_j)\oplus\bigoplus_{j=0}^{n}\mathcal{O}(\Omega\cap\bigcap_{k\neq j}V_k)\mid\varphi_{0,1,\cdots,n}=0\}=\bigoplus_{j=0}^{n}\mathcal{O}(\Omega\cap\bigcap_{k\neq j}V_k)=\bigoplus_{j=0}^{n}\mathcal{O}(\bigcap_{k\neq j}V_k)$ であるから，ここで $W_{\hat{j}}=\bigcap_{k\neq j}V_k$ とおくと $C^n(\mathcal{V}\bmod\mathcal{V}',\mathcal{O}_X)=\bigoplus_{j=0}^{n}\mathcal{O}_X(W_{\hat{j}})$ となる．記号を簡単にする為に $\varphi_{\Omega j_1\cdots j_n}\in\mathcal{O}(W_{\hat{j}_0})$ を $\varphi_{\hat{j}_0}$（但し $\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}0,1,&\cdots,&n\\ j_0,j_1,&\cdots,&j_n\end{pmatrix}=1$，尚，ここで$\begin{pmatrix}0,1,&\cdots,&n\\ j_0,j_1,&\cdots,&j_n\end{pmatrix}$は置換）と略記しよう．

最後に $C^{n-1}(\mathcal{V}\bmod\mathcal{V}',\mathcal{O}_X)$ を求めよう．

$\{\rho_{\lambda_0,\cdots,\lambda_{n-1}}\}\in C^{n-1}(\mathcal{V}\bmod\mathcal{V}',\mathcal{O}_X)$ としよう．ここで $\bmod\mathcal{V}'$ の定義により $\varphi_{\lambda_0,\cdots,\lambda_{n-1}}\in\Gamma(V_{\lambda_0}\cap\cdots\cap V_{\lambda_{n-1}},\mathcal{O}_X)$ なら $\varphi_{\lambda_0,\cdots,\lambda_{n-1}}=0$ である．よって $\varphi_{\Omega,i_0,\cdots,i_{n-2}}\in\Gamma(\Omega\cap V_{i_0}\cap\cdots\cap V_{i_{n-2}},\mathcal{O}_X)$ の形の元のみを考えればよい．これを $\varphi_{\widehat{i_{n-1}\,i_n}}$（但し $\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}0,1,\cdots,n\\ i_0,i_1\cdots,i_n\end{pmatrix}=1$）と略記する．そうすれば$\varphi_{\widehat{jk}}\in\mathcal{O}_X(\Omega\cap\bigcap_{l\neq j,k}V_l)=\mathcal{O}_X(\bigcap_{l=j,k}V_l)=\mathcal{O}_X(W_{\widehat{jk}})$ の元が定まり $\varphi_{\widehat{jk}}=-\varphi_{\widehat{kj}}$ である．但し $W_{\widehat{jk}}=\bigcap_{l\neq j,k}V_l$ とおく．結局 $C^{n-1}(\mathcal{V}\bmod\mathcal{V}',\mathcal{O}_X)=\bigoplus'_{\substack{j,k\\ j\neq k}}\mathcal{O}_X(W_{\widehat{jk}})$である．但し $\oplus'$ は交代和を表わす．即ち $\{\varphi_{\widehat{jk}}\}$ が $\oplus'\mathcal{O}_X(W_{\widehat{jk}})$ の元であるのは，任意の j,k に対し $\varphi_{\widehat{jk}}=-\varphi_{\widehat{jk}}$ が成り立つ時に限るとする．

以上により

$$\mathcal{B}_M(U)=\frac{\bigoplus_{j=0}^{n}\mathcal{O}_X(W_{\hat{j}})}{\mathrm{Im}(\bigoplus'_{j,k}\mathcal{O}_X(W_{\widehat{jk}})\xrightarrow{\delta}\bigoplus_{j=0}^{n}\mathcal{O}_X(W_{\hat{j}}))}$$

となることが判った．次に δ の像を求めてみよう．$\varphi=\{\varphi_{\hat{jk}}\}\in\bigoplus_{j,k}{}'\mathcal{O}_X(W_{\hat{jk}})$ に対し $(\delta\varphi)_{\hat{j}}$ を計算しよう． 定義により $(\delta\varphi)_{\hat{j_n}}=(\delta\varphi)_{\Omega j_0,\cdots j_{n-1}}=\varphi_{j_0,\cdots,j_{n-1}}-\varphi_{\Omega j_1,\cdots j_{n-1}}+\varphi_{\Omega j_0j_2\cdots j_{n-1}}-\cdots\cdots$

である． ここで再び定義により $\varphi_{j_0\cdots j_{n-1}}=0$ であり， 又， $-\varphi_{\Omega j_1\cdots j_{n-1}}=\varphi_{\widehat{j_0j_n}}$ (但し $\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}0, 1, \cdots, n\\ j_n, j_0\cdots, j_{n-1}\end{pmatrix}=1$，$\varphi_{\Omega j_0j_2\cdots j_{n-1}}=\varphi_{\widehat{j_1j_n}}$)，以下同様にして $(\delta\varphi)_{\hat{jn}}=\varphi_{\widehat{j_0j_n}}+\varphi_{\widehat{j_1j_n}}+\cdots+\varphi_{\widehat{j_{n-1}j_n}}(+\varphi_{\widehat{j_nj_n}}\ (=0))$，即ち $(\delta\varphi)_{\hat{j}}=\sum_{k=0}^{n}\varphi_{\hat{kj}}$ である．結局，$\delta(\{\varphi_{\hat{jk}}\})$ $\{\sum_{k=0}^{n}\varphi_{\hat{kj}}\}_j$ であることが判った．

さて $\varphi\in\mathcal{O}_X(W_{\hat{j}})$ に対してその“境界値” $b(\varphi)$ を

$$\begin{array}{ccccc}\mathcal{O}_X(W_{\hat{j}}) & \longrightarrow & \bigoplus_{l=0}^{n}\mathcal{O}_X(W_{\hat{l}}) & \longrightarrow & \dfrac{\bigoplus_{l=0}^{n}\mathcal{O}_X(W_{\hat{l}})}{\mathrm{Im}(\bigoplus_{l,k}{}'\mathcal{O}_X(W_{\hat{lk}})\to\bigoplus_{l=0}^{n}\mathcal{O}_X(W_{\hat{l}}))}=\mathcal{B}_M(U)\\ \Cup & & \Cup & & \Cup\\ \varphi & \longmapsto & (0,\ \cdots,\ \varphi_{\hat{l}},\ 0,\ \cdots,0) & \longmapsto & b(\varphi)\end{array}$$

なる規準的写像による像として定義する*)．そうすれば，以上の議論により $\mathcal{B}_M(U)\cong\sum_{j=0}^{n}b(\mathcal{O}_X(W_{\hat{j}}))$ となる． 即ち，向き付けられた開集合 U 上の超函数は $(n+1)$ 個の角領域 ($n=2$ の場合の図 1.2.1 参照) で定義された正則函数の ‘境界値’ の和と表わされることが判った．前述のことより $g_{\hat{j}}\in\mathcal{O}_X(W_{\hat{j}})$ $(0\leqq j\leqq n)$ に対して $\sum_{j=0}^{n}b(g_{\hat{j}})=0$ ということは，$f_{\hat{jk}}=-f_{\hat{kj}}$ となるような $f_{\hat{jk}}\in\mathcal{O}_X(W_{\hat{jk}})$ が存在して $g_{\hat{j}}=\sum_{k=0}^{n}f_{\hat{jk}}(0\leqq j\leqq n)$ と表わせることと同値である． 即ち， 二つの正則函数の ‘境界値’ が同じ超函数を定義する必要十分条件はその差がコバウンダリーになっていることである．むしろ，ここに超函数の定式化においてコホモロジー群が出てくる必然性があると言えよう．

なお，非常に簡単な場合として $n=1$ の場合に以上の議論を当てはめてみよう．$M=\boldsymbol{R}$，$X=\boldsymbol{C}$，$f_0(x)=x, f_1(x)=-x$ とする．この時定義により

$$V_0=\{z\in\Omega\,|\,\mathrm{Im}z>0\}$$

$$V_1=\{z\in\Omega\,|\,\mathrm{Im}z<0\}$$

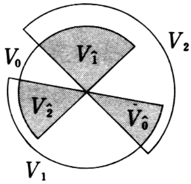
であるから $W_0=V_1, W_1=V_0$ である．$n=1$ 故

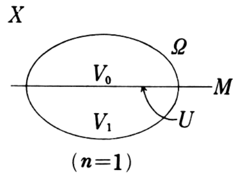
$$C^{n-1}(\mathcal{V}\bmod\mathcal{V}', \mathcal{O}_X)=\{(\varphi_\Omega,\ \varphi_0,\ \varphi_1)\in\mathcal{O}_X(\Omega)\oplus\mathcal{O}_X(V_0)\oplus\mathcal{O}_X(V_1)\,|\,\varphi_0=\varphi_1=0\}$$

---

*) 次章第3節において“正則函数の境界値”という概念は，改めて，microfunction の理論の立場から，より徹底した形で論じられる．

図 1.2.1.





$=\mathcal{O}_X(\Omega)$

である．従って，

$$\mathcal{B}_M(U)=\frac{\mathcal{O}_X(W_0)\oplus\mathcal{O}_X(W_1)}{\mathrm{Im}(\mathcal{O}_X(\Omega)\xrightarrow{\delta}\mathcal{O}_X(W_0)\oplus\mathcal{O}_X(W_1))}=\frac{\mathcal{O}_X(V_1)\oplus\mathcal{O}_X(V_0)}{\mathrm{Im}(\mathcal{O}_X(\Omega)\longrightarrow\mathcal{O}_X(V_1)\oplus\mathcal{O}_X(V_0))}$$

である．今，$g_+\in\mathcal{O}_X(V_0)$ と $g_-\in\mathcal{O}_X(V_1)$ が同じ‘境界値’を持てば，即ち，$b(g_+)=b(g_-)$ ならば $g_+-g_-=(g_0, g_1)\in\mathcal{O}_X(W_0)\oplus\mathcal{O}_X(W_1)$ (但し $g_0=-g_-$, $g_1=g_+$), がコバウンダリーになっていることから，$f(=f_{01}=-f_{10})\in\mathcal{O}_X(\Omega)$ が存在して $g_0=f_{00}+f_{10}=-f, g_1=f_{01}+f_{11}=f$ と表わせる．即ち $f\in\mathcal{O}_X(\Omega)$ が存在して $g_+=f|_{V_0}, g_-=f|_{V_1}$ と表わせる．従って $\mathcal{B}_M(U)=\mathcal{O}_X(\Omega-U)/\mathcal{O}_X(\Omega)$ であることが判る．

注意． $\boldsymbol{R}^n$ 上の超函数の層 $\mathcal{B}_{\boldsymbol{R}^n}=\mathcal{H}^n_{\boldsymbol{R}^n}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^n})$ を具体的に考察する時，上述のような $(n+1)$ 個の角領域からの‘境界値’として超函数を表わすよりも次のような 2^n 個の境界値の和として表わす方が便利なこともある：

$U_{k,\pm}=\{z\in\boldsymbol{C}^n; \pm\mathrm{Im} z_k>0\}$ (複号同順，$k=1, \cdots, n$) は $\boldsymbol{C}^n-\boldsymbol{R}^n$ の Stein 被覆である．そこで $\mathcal{U}'=\{U_{k,\pm}|k=1, \cdots, n\}$, $\mathcal{U}=\mathcal{U}'\cup\{\boldsymbol{C}^n\}$ とおけば

$$H^n_{\boldsymbol{R}^n}(\boldsymbol{C}^n, \mathcal{O})=H^n(\mathcal{U}\mathrm{mod}\mathcal{U}', \mathcal{O})=\frac{\mathrm{Ker}(C^n(\mathcal{U}\mathrm{mod}\mathcal{U}', \mathcal{O})\xrightarrow{\delta}C^{n+1}(\mathcal{U}\mathrm{mod}\mathcal{U}', \mathcal{O})}{\mathrm{Im}(C^{n-1}(\mathcal{U}\mathrm{mod}\mathcal{U}', \mathcal{O})\xrightarrow{\delta}C^n(\mathcal{U}\mathrm{mod}\mathcal{U}'\mathcal{O}))}$$

と表わせる．ここにおいて $C^{n+1}(\mathcal{U}\mathrm{mod}\mathcal{U}', \mathcal{O})=0$, $C^n(\mathcal{U}\mathrm{mod}\mathcal{U}', \mathcal{O})=$ $\bigoplus_{\varepsilon_1=\pm1, \cdots \varepsilon_n=\pm1}\mathcal{O}(U_{1\varepsilon_1}\cap\cdots\cap U_{n\varepsilon_n}), C^{n-1}(\mathcal{U}\mathrm{mod}\mathcal{U}', \mathcal{O})=\bigoplus_{k,\varepsilon_{\hat{k}}}(\mathcal{O}\hat{k}, \varepsilon_{\hat{k}})$ 但し $\mathcal{O}(\hat{k}, \varepsilon_{\hat{k}})\underset{\mathrm{def}}{=}$ $\mathcal{O}(U_{1,\varepsilon_1}\cap\cdots\cap U_{k-1,\varepsilon_{k-1}}\cap U_{k+1,\varepsilon_{k+1}}\cdots\cap U_{n,\varepsilon_n}), \varepsilon_{\hat{k}}=(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{k-1}, \varepsilon_{k+1}, \cdots, \varepsilon_n)$, となることは前と同様である．コバウンダリーを計算すると，$\psi=\{\psi(\hat{k}, \varepsilon_{\hat{k}})\}\in$ $C^{n-1}(\mathcal{U}\mathrm{mod}\mathcal{U}', \mathcal{O})$ に対して $(\delta\psi)_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\psi(\hat{k}, \varepsilon_{\hat{k}})$, $\varepsilon_{\hat{k}}=$ $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{k-1}, \varepsilon_{k+1}, \cdots, \varepsilon_n)$ となる．$H^n_{\boldsymbol{R}^n}(\boldsymbol{C}^n, \mathcal{O})$ の元 $\{\psi_{\varepsilon_1, \ldots\varepsilon_n}\}\mathrm{mod}\{\sum(-1)^k\psi(\hat{k}, \varepsilon_{\hat{k}})\}$ を $\sum_{\varepsilon}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n b(\psi_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n})=\sum_{\varepsilon}b(g_\varepsilon)$ と表わすことにする．その時 $\sum_{\varepsilon}b(g_\varepsilon)=0$ ならば

定義により $\varphi(\hat{k}, \varepsilon_{\hat{k}}) \in \mathcal{O}(\hat{k}, \varepsilon_{\hat{k}})$ が存在して $\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n g_\varepsilon = \sum_k (-1)^k \varphi_{k, \varepsilon_1\cdots\varepsilon_{k-1}\varepsilon_{k+1}\cdots\varepsilon_n}$ と表わせるから，$g_\varepsilon = \sum_k (-1)^k \varepsilon_1\cdots\varepsilon_n \varphi_{k, \varepsilon_1\cdots\varepsilon_{k-1}, \varepsilon_{k+1}\cdots\varepsilon_n}$ となる．ここで $h_{\varepsilon_k} = \varepsilon_1\cdots\varepsilon_{k-1}\varepsilon_{k+1}\cdots\varepsilon_n \varphi_{k, \varepsilon_1\cdots\varepsilon_{k-1}\varepsilon_{k+1}\cdots\varepsilon_n}$ とおけば，$g_\varepsilon = \sum_k (-1)^k \varepsilon_k h_{\varepsilon_k}$ と表わせる．即ち，$\sum_\varepsilon b(g_\varepsilon) = 0$ ならば $g_\varepsilon = \sum_k (-1)^k \varepsilon_k h_{\varepsilon_k}$ と表わせる．この事実は超函数の具体的取扱において基本的である．

なお，一般に $\boldsymbol{R}^n$ の開集合 U 上の超函数についても全く同様の事実が成立する．

最後に M 上の orientation sheaf $\omega_M = \mathcal{H}^n_M(\boldsymbol{Z}_X)$ についても $\mathcal{H}^n_M(\mathcal{O}_X)$ と同様に開被覆を用いてのコホモロジー群で表わすことが出来ることを示し，それによって ω_M が局所的には $\boldsymbol{Z}_M$ と同型になることを証明しよう．これにより超函数の層 $\mathcal{B}_M$ は局所的には(又は M が向き付けられていれば) $\mathcal{H}^n_M(\mathcal{O}_X)$ と考えてよいことが判る．

Orientation sheaf の構造を調べる為に，言葉の準備をまずしておこう．

定義 1.2.3. 位相空間 X, Y の間の二つの連続写像 $f_i: X \to Y (i=0, 1)$ が**ホモトピック** (homotopic) であるとは，$I = [0, 1]$ に対して連続写像 $F: X\times I \to Y$ で $F(x, 0) = f_0(x)$，$F(x, 1) = f_1(x)$ となるものが存在することである．この時 F を f_0 と f_1 の間の**ホモトピー** (homotopy) と言い $f_0 \simeq f_1$ と記す．

位相空間 X, Y が同じホモトピー型を持つとは連続写像 $f: X\to Y$ および $g: Y\to X$ が存在して $g\circ f \simeq 1_X$，$f\circ g \simeq 1_Y$ となることである．

位相空間 X が**可縮** (contractible) とは，連続写像 $F: X\times I \to X$ であって任意の $x\in X$ と任意の $t\in I$ に対し，$F(x, 0) = x$，$F(x, 1) = x_0$，$F(x_0, t) = x_0$ となるものが存在することを謂う．

注意. 可縮ならば一点と同じホモトピー型を持つ．

次の定理は定数層係数のコホモロジー群のホモトピー不変性を保障する．

定理 1.2.4. X, Y を位相空間，M を加群としこれを X, Y 上の定数層と考える(即ち M_X, M_Y を単に M と記す)．X と Y が同じホモトピー型を持てば $H^k(X, M) \cong H^k(Y; M)$ である．特に X が可縮ならば

$$H^k(X, M) = \begin{cases} 0 & (k \neq 0) \\ M & (k = 0) \end{cases}$$

が成り立つ.

この定理の証明は第2章§2の最後にまわすこととする.

これを使って次の定理を証明しよう.

定理 1.2.5. M を加群とする時

$$\mathcal{H}^k_{R^n\times\{0\}}(M_{R^{n+l}})\cong\begin{cases}M_{R^n} & (k=l)\\ 0 & (k\neq l)\end{cases}$$

が成立する. 特に $k\neq n$ ならば $\mathcal{H}^k_M(\boldsymbol{Z}_X)=0$ が成立する.

[証明] 命題を $A_{n,l}$ として n と l に関する帰納法で証明しよう. “命題 $A_{n,l}$ が真なら命題 $A_{n',l'}$ が真” という陳述を以下 “$A_{n,l}\Rightarrow A_{n',l'}$” と略記することにする. $\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{R}^{n+l}$ の開球 U, V に対して

$$H^k_{U\times\{0\}}(U\times V, M)=\begin{cases}M & (k=n)\\ 0 & (k\neq n)\end{cases}$$

を示せばよい. U は可縮だから定理 1.2.4 により

$$H^k(U\times V, M)\cong H^k(V, M),\ H^k(U\times(V-\{0\}, M)\cong H^k(V-\{0\}, M)$$

となる. よって

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots\to H^{k-1}(U\times V, M) & \to & H^{k-1}(U\times(V-\{0\}), M) & \to & H^k_{U\times\{0\}}(U\times V, M) & \longrightarrow \\
\wr\| & & \wr\| & & \uparrow & \\
\cdots\to H^{k-1}(V, M) & \longrightarrow & H^{k-1}(V-\{0\}, M) & \longrightarrow & H^k_{\{0\}}(V, M) & \longrightarrow \\
 & & \to H^k(U\times V, M) & \longrightarrow & H^k(U\times(V-\{0\}), M) & \to\cdots \\
 & & \wr\| & & \wr\| & \\
 & & \to H^k(V, M) & \longrightarrow & H^k(V-\{0\}, M) & \longrightarrow\cdots
\end{array}$$

が成り立ち, Five lemma により $H^k_{U\times\{0\}}(U\times V, M)=H^k_{\{0\}}(V, M)$ となる. 従って “任意の l に対して $A_{0,l}\Rightarrow A_{n,l}$” が証明された. 次に “$A_{0,1}\Rightarrow A_{0,l}$” を示そう. それには “$A_{0,l-1}\Rightarrow A_{0,l}$” を示せばよいが, “$A_{0,l-1}\Rightarrow A_{1,l-1}$” が言えているから “$A_{1,l-1}\Rightarrow A_{0,l}$” を言えば十分である. $A_{1,l-1}$ が成立するなら $\boldsymbol{R}\times\{0\}$ は M_{R^l} に関して純 $(l-1)$ 余次元的故命題 1.1.6 により
$H^k_{\{0\}}(\boldsymbol{R}^l, M)=H^{k-(l-1)}_{\{0\}}(\boldsymbol{R}\times\{0\}, \mathcal{H}^{l-1}_{\boldsymbol{R}\times\{0\}}(M))=$

$$=H^{k-l+1}_{\{0\}}(\boldsymbol{R}, M)=\begin{cases}M, & k-l+1=1,\ \text{即ち}\ k=l\\ 0, & k-l+1\neq 1,\ \text{即ち}\ k\neq l\end{cases}$$

となり $A_{0,l}$ が得られる. 最後の等式は $A_{0,1}$ による.

最後に $A_{0,1}$ を証明しよう. 完全系列

$$\cdots \to H^{k-1}(\boldsymbol{R}-\{0\}, M) \longrightarrow H^k_{\{0\}}(\boldsymbol{R}, M) \longrightarrow H^k(\boldsymbol{R}, M) \to \cdots$$

において，$\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}^+, \boldsymbol{R}^-$ は可縮であるから

$$H^k(\boldsymbol{R}, M) = \begin{cases} M & (k=0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$

及び

$$H^{k-1}(\boldsymbol{R}-\{0\}, M) = H^{k-1}(\boldsymbol{R}^+, M) \oplus H^{k-1}(\boldsymbol{R}^-, M) = \begin{cases} M^2 & (k=1) \\ 0 & (k \neq 1) \end{cases}$$

となるから $k \neq 0, 1$ ならば $H^k_{\{0\}}(\boldsymbol{R}, M) = 0$ となる．次に $k=0,1$ の場合を考えよう．まず

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to H^0_{\{0\}}(\boldsymbol{R}, M) \to & H^0(\boldsymbol{R}, M) & \xrightarrow{\varphi} & H^0(\boldsymbol{R}-\{0\}, M) & \to H^1_{\{0\}}(\boldsymbol{R}, M) \to 0 \quad (\text{完全}) \\ & \| & & \| & \\ & M & & M \oplus M & \\ & \Cup & & \Cup & \\ & x & \longmapsto & (x, x) & \end{array}$$

となることに注意しよう．ここで φ は単射故 $H^0_{\{0\}}(\boldsymbol{R}, M) = 0$,
$H^1_{\{0\}}(\boldsymbol{R}, M) = (M \oplus M)/M \cong M$を得る． (証終)

さて定理 1.2.4 と定理 1.2.5 を用いて $\omega_M = \mathscr{H}^n_M(\boldsymbol{Z}_X)$ の断面を調べよう．$\boldsymbol{R}^n$ の $(n+1)$個のベクトル $\xi_0, \cdots, \xi_n$ をその凸包が原点の近傍となるようにとる．M の点 P の連結な座標近傍 $\{U, x=(x_1, \cdots x_n)\}$ をとり $f_j(x) = \langle \xi_j, x \rangle$ $(0 \leqq j \leqq n)$ とおけば，$f_0(x), \cdots, f_n(x)$ は M 上の実数値実解析函数，かつ各 $x \in U$ に対して $df_0(x), \cdots, df_n(x)$ の凸包は T^*_xM の原点の近傍である．Uを閉集合として含む X の可縮な近傍 Ω に対して $V_j = \{z \in \Omega \mid \operatorname{Im} f_j(z) > 0\}$ $(0 \leqq j \leqq n)$ も可縮だから $\mathscr{U} = \{\Omega,\ V_0, \cdots, V_n\}$，$\mathscr{U}' = \{V_0, \cdots, V_n\}$ は定理 1.2.4 によりそれぞれ $\Omega, \Omega - U$ のルレイ被復 (即ち定理 1.2.1 の条条を満たす被覆) になっている．よって定理 1.2.1，命題 1.1.5 および定理 1.2.5 を合わせ用いれば $\omega_M(U) = H^n_{M \cap U}(\Omega, \boldsymbol{Z}_X) =$
$= \dfrac{\bigoplus_{j=0}^{n} \Gamma(W_j, \boldsymbol{Z}_X)}{\delta(\bigoplus'_{j,k} \Gamma(W_{jk}, \boldsymbol{Z}_X))}$ となる．但し $W_j = \bigcap_{k \neq j} V_k$，$W_{jk} = \bigcap_{l \neq j,k} V_l$，$\oplus'$ は交代和である．然るに W_j, W_{jk} は連結であるから

$$\Gamma(W_j, \boldsymbol{Z}_X) \cong \boldsymbol{Z},\quad \Gamma(W_{jk}, \boldsymbol{Z}_X) \cong \boldsymbol{Z}$$

となる．ここで写像 $\varphi: \bigoplus_{j=0}^{n} \Gamma(V_j, \boldsymbol{Z}_X) = \boldsymbol{Z}^{n+1} \ni (s_i) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} s_i \in \boldsymbol{Z}$ を考えてみよう．明らかに φ は全射である．次に，その核が $\delta(\bigoplus'_{j,k} \Gamma(W_{jk}, \boldsymbol{Z}_X))$ になることを見よう．

補題. 整数 $s_0, \cdots, s_n$ が $\sum_{i=0}^{n} s_i=0$ を満たせば $s_{jk}=-s_{kj}$ となる整数 s_{jk} $(j, k=0, \cdots, n)$ が存在して $s_i=\sum_{k=0}^{n} s_{ki}(0 \leqq i \leqq n)$ となる. 逆も成り立つ.

［証明］ $n=1$ の時は $s_0+s_1=0$ 故, $s_{10}=-s_{01}=s_0$ とおけば $s_0=s_{00}+s_{10}, s_1=s_{01}+s_{11}(s_{00}=s_{11}=0$ に注意)となり補題は成り立つ. よって n に関する帰納法で証明しよう. $\sum_{i=0}^{n} s_i=0$ とする時 $s_0'=s_0+s_n, s_1'=s_1, \cdots, s_{n-1}'=s_{n-1}$ とおけば $\sum_{i=0}^{n-1} s_i'=0$ 故, 帰納法の仮定により $s_{jk}=-s_{kj} \in \boldsymbol{Z}$ $(j, k=0, \cdots, n-1)$ が存在して $s_i' =\sum_{k=0}^{n-1} s_{ki}(i=0,1, \cdots, n-1)$ となる. ここで $s_{0n}=-s_{n0}=s_n, s_{nj}=-s_{jn}=0$ $(j=1, \cdots, n)$ とおけば $s_i=\sum_{k=0}^{n} s_{ki}(0 \leqq i \leqq n)$ となる. 逆は明らかである. (補題の証終)

補題により φ の核は $\delta(\bigoplus_{j,k}{}' \Gamma(W_{jk}, \boldsymbol{Z}_X))$ であることがわかる. 従って, これより $H_U^n(\Omega, \boldsymbol{Z}_X) \cong \boldsymbol{Z}$ を得る. 即ち U が連結な座標近傍ならば $\omega_M(U) \cong \boldsymbol{Z}$ となる. 故に ω_M は局所的には定数層 $\boldsymbol{Z}_M$ と同型である. なお, ここで局所座標 $(x_1, \cdots, x_n)$ の代わりに別の局所座標 $(y_1, \cdots, y_n)$ をとっても ω_M は $\boldsymbol{Z}_M$ と同型であるから $\boldsymbol{Z} \rightarrow \boldsymbol{Z}$ なる同型写像が得られる. $\boldsymbol{Z}$ の自己同型は $\pm 1_{\boldsymbol{Z}}$ に限られており, $\det\left(\frac{\partial(y_i)}{\partial(x_j)}\right)>0$ の時 $1_{\boldsymbol{Z}}$, $\det\left(\frac{\partial(y_i)}{\partial(x_j)}\right)<0$ の時 $-1_{\boldsymbol{Z}}$ となる.

U を M の連結開集合としよう. $0 \neq s \in \omega_M(U)$ なる s が存在すれば s は U の各点 x で 0 でない(即ち $s_x \neq 0$). 実際 $U=\bigcup_{i \in I} U_i$, 但し U_i は連結な座標近傍, $(x_i^1, \cdots, x_i^n)$ をその局所座標, として各 U_i に向き付け or を $(x_i^1, \cdots, x_i^n)$ が or に関して正の局所座標になるように向き付けを定めておこう. この時 $s|_{U_i}$ に対して $\boldsymbol{Z}$ の元 $\varphi_i(s)$ が定まるが $U_i \cap U_j \neq \phi$ ならば $\boldsymbol{Z}$ の自己同型が ± 1 しかないことにより $\varphi_i(s)= \pm \varphi_j(s)$ が成り立つ. U は連結故 $c \in \boldsymbol{Z}$ が存在して $\varphi_i(s)=\varepsilon_i c$ $(\varepsilon_i= \pm 1)$ となる(このことから $s_x=c \neq 0$ となる). そこで U_i の新しい向き付け $\widetilde{or}_{U_i}$ を $\widetilde{or}_{U_i}=\varepsilon_i or_{U_i}$ により定義すれば $\widetilde{or}_{U_i}|_{U_i \cap U_j}=\widetilde{or}_{U_j}|_{U_i \cap U_j}$ が成り立つ. $\widetilde{or}_{U_i}$ に関して正の局所座標を $(x_i^1, \cdots x_i^n)$ とすれば $U_i \cap U_j \neq \phi$ なる限り $\det\left(\frac{\partial(x_i{}^l)}{\partial(x_j{}^k)}\right)_{1 \leqq l, k \leqq n}>0$ となり U を向き付けることが出来る(更に U がパラコンパクトならば 1 の分解を用いて U 上連続な n 次微分形式が存在することも容易に証明出来る). 逆に言えば, U が向き付け不可能ならば $\omega_M(U)=0$ である. 即ち, $\omega_M(U)$ の 0 でない断面を与えることと U に向き付けを定めることは同値である.

従って座標系を固定して考えている時, 或いは局所的に問題を考える時, 或

いは M が向き付け可能であるような時には,

$\mathcal{B}_M=\mathcal{H}^n_M(\mathcal{O}_X)\underset{\boldsymbol{Z}_M}{\otimes}\omega_M\cong\mathcal{H}^n_M(\mathcal{O}_X)$ となるから $\mathcal{B}_M(U)\cong H^n_U(X,\mathcal{O}_X)$ となる.

第2章　Microfunction

§1.　Microfunction の定義

M を(実)多様体，N をその部分多様体とする．以下では部分多様体は正則(regular) である，即ちその位相が部分空間の位相と一致していると仮定する．これは M の適当な局所座標 $\{U_j, (x_j^1, \cdots, x_j^m)\}$ をとれば $N\cap U_j=\{x_j^1=\cdots=x_j^l=0\}$ とすることができると云うことと同値である(例えば松島 [1] を参照されたい)．

定義 2.1.1. (a)　$x\in M$ に対して T_xM により M の x における接(ベクトル)空間を表わし，$TM=\bigcup_{x\in M} T_xM$ により M の**接(ベクトル)束** (tangent (vector) bundle) を表わす．

(b)　一般に $f: X\to Y$, $g: X'\to Y$ なる写像がある時 X と X' の**ファイバー積** (fibre product) を $X\underset{Y}{\times} X'=\{(x, x')\in X\times X' \mid f(x)=g(x')\}$ として定義する．

(c)　N を M の部分多様体とする時

$$\mathrm{Coker}(TN\to N\underset{M}{\times} TM)=\bigcup_{x\in N} T_xM/T_xN$$

を N の M における**法束** (normal bundle) と呼び T_NM と記す．

(d)　T_x^*M により T_xM の双対ベクトル空間，即ち余接(ベクトル)空間を表わし $T^*M=\bigcup_{x\in M} T_x^*M$ を M の**余接束** (cotangent bundle) と呼ぶ．

(e)　$\mathrm{Ker}(N\underset{M}{\times} T^*M\to T^*N)=\bigcup_{x\in N}\{\eta\in T_x^*M \mid <\eta, T_xN>=0\}$ を N 上の M に関する**余法束** (conormal bundle) と呼び T_N^*M と記す．

(f)　$\boldsymbol{R}_+^\times$ を正の実数のなす乗法群とする時，

$$(TM-M)/\boldsymbol{R}_+^\times=\bigcup_{x\in M}(T_xM-\{0\})/\boldsymbol{R}_+^\times$$

を M の**接球面束** (tangential sphere bundle) と呼び，SM と記す．同様に，$(T^*M-M)/\boldsymbol{R}_+^\times=\bigcup_{x\in M}(T_x^*M-\{0\})/\boldsymbol{R}_+^\times$ を M の**余接球面束** (cotangential sphere bundle) と呼び S^*M と記す．更に $(T_NM-N)/\boldsymbol{R}_+^\times=$

$\bigcup_{x\in N}((T_xM/T_xN)-\{0\})/\boldsymbol{R}_+^\times$ を N 上の M に関する**法球面束**(normal sphere bundle) と呼び，S_NM と記す．又，$(T_N^*M-N)/\boldsymbol{R}_+^\times=\bigcup_{x\in N}\{\eta\in T_x^*M\mid <\eta, T_xN>=0\}/\boldsymbol{R}_+^\times$ を N 上の M に関する**余法球面束** (conormal sphere bundle) と言い，S_N^*M と記す．*)

さて次に，M の N を中心 (center) とする**実モノイダル変換**(実単項的変換, real monoidal transform)**) を定義しよう．

$M=\bigcup_{j\in J}U_j$ として U_j の局所座標 $(x_j^1, \cdots, x_j^m)$ は $U_j\cap N=\{x_j\mid x_j^1=\cdots=x_j^l=0\}$ を満たすものとする．但し $l=\mathrm{codim}_MN$ とする．$U_j(j\in J)$ の間の座標変換が

$$(2.1.1)\qquad \begin{cases} x_j^\nu=f_{jk}^\nu(x_k) & \nu=l+1, \cdots, m \\ x_j^\nu=\sum_{\mu=1}^{l}x_k^\mu g_{jk,\mu}^\nu(x_k) & \nu=1, \cdots, l \end{cases}$$

となっているとしてよい．その時 $U_j'(j\in J)$ を $U_j'=\{(x_j, \xi_j)=(x_j^1, \cdots, x_j^m; \xi_j^1, \cdots, \xi_j^l)\in U_j\times(\boldsymbol{R}^l-\{0\})\mid x_j^\nu\xi_j^\mu=x_j^\mu\xi_j^\nu$ かつ $x_j^\nu\xi_j^\nu\geqq 0\ (\mu, \nu=1, \cdots, l)\}$ と定義する．$(x_j, \xi_j)\in U_j'$ かつ $x_j\notin N\cap U_j$ とすれば，条件より正の実数 $t>0$ が存在して $\xi_j=(tx_j^1, tx_j^2, \cdots, tx_j^l)$ となる．又，$x_j\in N\cap U_j$ なら $\xi_j\in\boldsymbol{R}^l-\{0\}$ には何の条件もつかないことは容易に判る．$\boldsymbol{R}_+^\times$ は $\boldsymbol{R}_+^\times\times U_j'\to U_j'$ を $((x_j, \xi_j), t)\mapsto(x_j, t\xi_j)$ と定めることにより U_j' に作用しているから，この作用で互いに移るものを同値として同値関係を定め，それにより U_j' を類別したものを $\tilde{U}_j$ と置く．即ち $\tilde{U}_j=U_j'/\boldsymbol{R}_+^\times$ である．これらの $\tilde{U}_j$ を次のようにして貼り合わせる．

$(x_j, \xi_j)\in\tilde{U}_j$ と $(x_k, \xi_k)\in\tilde{U}_k$ に対して x_j と x_k は (2.1.1) を満たし，更に $\xi_j^\nu=\sum_{\mu=1}^{l}\xi_k^\mu g_{jk,\mu}^\nu(x_k)\ (\nu=1, \cdots, l)$ を満たす時，かつ，その時に限り (x_j, ξ_j) と (x_k, ξ_k) を同一の点と見做すことにする．こうして得られた多様体を ${}^N\widetilde{M}$ と記し M の N を中心とする実モノイダル変換と謂う．集合としては ${}^N\widetilde{M}=(M-N)\sqcup S_NM$ になっていることは定義より明らかである ($\sqcup$ は互いに素な合併集合 (disjoint union) の意味)．

---

*)　M は TM 或いは T^*M の零断面，即ち $\{(x, \xi)\in TM\mid\xi=0\}$ 或いは $\{(x, \eta)\in T^*M\mid\eta=0\}$ と同一視できるので，M により TM 又は T^*M の零断面を表わすという略記法を，以下，しばしば用いる．

**)　代数幾何学で基本的な単項的変換の概念を実多様体に移したものである．

さて M を n 次元実解析的多様体，X をその複素化とすれば $TX|_M=TM\oplus\sqrt{-1}\,TM$ である．即ち，$x\in M$ に対して $T_xX=T_xM\oplus\sqrt{-1}\,T_xM$. 従って $T_MX=\sqrt{-1}\,TM(\cong TM)$ であるから $S_MX=\sqrt{-1}SM$ と同一視できる．又，$x\in M$, $v\in T_xM-\{0\}$ とする時 $\sqrt{-1}v\in(T_MX)_x$ と考えられるから，$\sqrt{-1}SM(=S_MX)$ の $\sqrt{-1}v$ に対応する点を $x+\sqrt{-1}v0$ と記すことにする．$\widetilde{{}^MX}=(X-M)\sqcup\sqrt{-1}SM$ である．特に $M=\boldsymbol{R}^n$, $X=\boldsymbol{C}^n$ の場合を考えよう．この時は $\widetilde{{}^MX}=(\boldsymbol{C}^n-\boldsymbol{R}^n)\sqcup\sqrt{-1}S^{n-1}\times\boldsymbol{R}^n$ である．$x\in M=\boldsymbol{R}^n$, $t\in\boldsymbol{R}^\times_+$ $v\in\boldsymbol{R}^n-\{0\}$ に対して $x+\sqrt{-1}tv\in\widetilde{{}^MX}$ であり

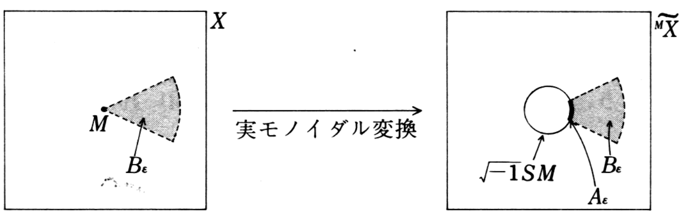
$\lim_{t\to+0}(x+\sqrt{-1}\,tv)=x+\sqrt{-1}\,v\,0\in\widetilde{{}^MX}$ である．即ち，$X-M$ 内の点の M への近付き方を区別したものが実モノイダル変換 $\widetilde{{}^MX}$ であると考えられる．定義から判るように，

$$A_\varepsilon \underset{\text{def}}{=} \{x+\sqrt{-1}\,v\,0\in\sqrt{-1}SM\,|\,|x-x_0|<\varepsilon,\ \ |v-v_0|<\varepsilon\}$$

$$B_\varepsilon \underset{\text{def}}{=} \{x+\sqrt{-1}\ tv\in\widetilde{{}^MX}-\sqrt{-1}SM=X-M\,|\,0<t<\varepsilon,\quad |x-x_0|<\varepsilon,\ |v-v_0|<\varepsilon\}$$

と定めれば $x_0+\sqrt{-1}\,v_00\in\widetilde{{}^MX}$ の基本近傍系として $A_\varepsilon\cup B_\varepsilon$ をとることができることを注意しておこう(下図 2.1.1 参照).

図 2.1.1.



定義 2.1.2. $X-M\hookrightarrow X$ なる自然な埋め込み写像を ε, $\widetilde{{}^MX}-\sqrt{-1}\,SM\hookrightarrow\widetilde{{}^MX}$ なる自然な埋め込み写像を $\tilde{\varepsilon}$ と記す．又 $\widetilde{{}^MX}$ から X への自然な射影(projection map)を τ と記す(図 2.1.2 参照).

図 2.1.2.

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{{}^MX} & \overset{\tilde{\varepsilon}}{\hookleftarrow} & \widetilde{{}^MX}-\sqrt{-1}SM \\ {\scriptstyle\tau}\downarrow & & \| \\ X & \overset{\varepsilon}{\hookleftarrow} & X-M \end{array}$$

又，$\sqrt{-1}\,SM\hookrightarrow\widetilde{{}^MX}$ なる自然な埋め込み写像を $\tilde{\tau}$ と記す．この時，$\mathcal{O}_X$ を X 上の正則函数の層として

(1) $\tilde{\mathcal{O}}=\tilde{\varepsilon}_*\varepsilon^{-1}\mathcal{O}_X$

(2) $\tilde{\mathscr{A}}=\tilde{\mathcal{O}}|_{\sqrt{-1}SM}(=\tilde{\tau}^{-1}\tilde{\mathcal{O}})$

により $\widetilde{{}^M X}$ 上の層 $\tilde{\mathcal{O}}$ と $\sqrt{-1}SM$ 上の層 $\tilde{\mathscr{A}}$ を定義する.

注意. $x+\sqrt{-1}v0\in\sqrt{-1}SM$ に対して

$$\tilde{\mathscr{A}}_{x+\sqrt{-1}v0}=\tilde{\mathcal{O}}_{x+\sqrt{-1}v0}=\varinjlim_{x+\sqrt{-1}v0\in\tilde{U}}\tilde{\mathcal{O}}(\tilde{U})=\varinjlim_{x+\sqrt{-1}v0\in\tilde{U}}(\varepsilon^{-1}\mathcal{O}_X)(\tilde{\varepsilon}^{-1}(\tilde{U}))$$

$$=\varinjlim_{x+\sqrt{-1}v0\in\tilde{U}}\mathcal{O}_X(\tilde{U}-\sqrt{-1}SM)$$

となるから $\tilde{\mathscr{A}}$ は正則函数の境界値のつくる層と考えることもできる. この時各 v がどの方向からの境界値をとっているか, と云うことを明示することになる.

命題 2.1.1. $\sqrt{-1}SM$ は $\tau^{-1}\mathcal{O}_X$ に関して純1余次元的である. 即ち $k\neq1$ ならば $\mathscr{H}^k_{\sqrt{-1}SM}(\tau^{-1}\mathcal{O}_X)=0$.

［証明］ 層 $\mathscr{H}^k_{\sqrt{-1}SM}(\tau^{-1}\mathcal{O}_X)$ が0か否かと云うことは局所的な命題だから $M=\boldsymbol{R}^n$, $X=\boldsymbol{C}^n$, $x_0=0$ と仮定して一般性を失わない. 従って $v_0\in\boldsymbol{R}^n-\{0\}$ として $\mathscr{H}^k_{\sqrt{-1}SM}(\tau^{-1}\mathcal{O}_X)_{0+\sqrt{-1}v_00}=0$ $(k\neq1)$ を示せばよい. まず

$$\mathscr{H}^k_{\sqrt{-1}SM}(\tau^{-1}\mathcal{O}_X)_{0+\sqrt{-1}v_00}=\varinjlim_{0+\sqrt{-1}v_00\in\tilde{U}}H^k_{\sqrt{-1}SM\cap\tilde{U}}(\tilde{U},\tau^{-1}\mathcal{O}_X)$$

に注意しよう. ここで第1章§1定理 1.1.2(3) を用いれば次の完全系列を得る:

$$\text{(2.1.2)}\quad \cdots\to H^{k-1}(\tilde{U},\tau^{-1}\mathcal{O}_X)\longrightarrow H^{k-1}(\tilde{U}-\sqrt{-1}SM,\tau^{-1}\mathcal{O}_X)\longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^k_{\sqrt{-1}SM\cap\tilde{U}}(\tilde{U},\tau^{-1}\mathcal{O}_X)\longrightarrow H^k(\tilde{U},\tau^{-1}\mathcal{O}_X)\longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^k(\tilde{U}-\sqrt{-1}SM,\tau^{-1}\mathcal{O}_X)\to\cdots\quad(\text{完全}).$$

さて今, $A_\varepsilon=\{x+\sqrt{-1}v0\mid |x|<\varepsilon, |v-v_0|<\varepsilon\}$

$B_\varepsilon=\{x+\sqrt{-1}tv\mid 0<t<\varepsilon,\ |v-v_0|<\varepsilon,\ |x|<\varepsilon\}$

と定めれば $0+\sqrt{-1}v_00$ の基本近傍系 $\{\tilde{U}_\varepsilon\}$ を $\tilde{U}_\varepsilon=A_\varepsilon\cup B_\varepsilon$ と定めて得ることが出来る.

$\tilde{U}_\varepsilon-\sqrt{-1}SM=B_\varepsilon$ は $\boldsymbol{C}^n$ の凸集合故, 特に Stein 多様体になっている. 従って岡-Cartan の定理(第1章定理 1.2.2) により $k\neq0$ なる限り $H^k(\tilde{U}_\varepsilon-\sqrt{-1}SM,\mathcal{O}_X)=0$ が言える.

補題. $\mathscr{F}$ を位相空間 X 上の層，$x\in X$ とする時

$$\varinjlim_{U\ni x} H^k(U,\mathscr{F})=\begin{cases}0 & (k\neq 0)\\ \mathscr{F}_x & (k=0)\end{cases}$$

が成り立つ.

［証明］ $0\to\mathscr{F}\to\mathscr{L}^0\to\mathscr{L}^1\to\cdots$ を $\mathscr{F}$ の脆弱分解とする. $H^k(U,\mathscr{F})=H^k(\Gamma(U,\mathscr{L}^*))$ 故帰納的極限をとる操作と複体からコホモロジー群を作る操作が可換であることに注意すれば

$$\varinjlim_{x\in U} H^k(U,\mathscr{F})=H^k(\varinjlim_{x\in U}\Gamma(U,\mathscr{L}^*))=H^k(\mathscr{L}^*)_x=\begin{cases}0, & k\neq 0\\ \mathscr{F}_x & k=0\end{cases}$$

が成立する. （証終）

この補題により

$$\varinjlim_{0+\sqrt{-1}v_0 0\in\tilde{U}} H^k(\tilde{U},\tau^{-1}\mathscr{O}_X)=0\quad(k>0)$$

および

$$\varinjlim_{0+\sqrt{-1}v_0 0\in\tilde{U}} H^0(\tilde{U},\tau^{-1}\mathscr{O}_X)=(\tau^{-1}\mathscr{O}_X)_{0+\sqrt{-1}v_0 0}=(\mathscr{O}_X)_0$$

を得る. 従って， 完全系列(2.1.2)において $\tilde{U}=\tilde{U}_\varepsilon$ をとり，$\varepsilon\to 0$ として帰納的極限をとれば

$$(2.1.3)\begin{cases}0\to\mathscr{H}^0_{\sqrt{-1}SM}(\tau^{-1}\mathscr{O}_X)_{0+\sqrt{-1}v_0 0}\to\mathscr{O}_{X,0}\to\varinjlim_{0+\sqrt{-1}v_0 0\in\tilde{U}}\mathscr{O}_X(\tilde{U}-\sqrt{-1}SM)\to\\ \qquad\to\mathscr{H}^1_{\sqrt{-1}SM}(\tau^{-1}\mathscr{O}_X)_{0+\sqrt{-1}v_0 0}\to 0\\ \text{および}\\ 0\to\mathscr{H}^k_{\sqrt{-1}SM}(\tau^{-1}\mathscr{O}_X)\to 0\quad(k\geqq 2)\end{cases}$$

なる完全系列を得る. 即ち $\mathscr{H}^k_{\sqrt{-1}SM}(\tau^{-1}\mathscr{O}_X)=0$ $(k\geqq 2)$. $k=0$ については解析接続の一意性により $\mathscr{O}_{X,0}\hookrightarrow\varinjlim_{0+\sqrt{-1}v_0 0\in\tilde{U}}\mathscr{O}_X(\tilde{U}-\sqrt{-1}SM)$ は単射的故，$\mathscr{H}^0_{\sqrt{-1}SM}(\tau^{-1}\mathscr{O}_X)=0$ を得る. （証終）

定義 2.1.3. $\sqrt{-1}SM$ 上の層 $\mathscr{Q}$ を $\mathscr{Q}=\mathscr{H}^1_{\sqrt{-1}SM}(\tau^{-1}\mathscr{O}_X)$ により定義する.

以下 M 上の実解析函数のなす層を $\mathscr{A}(=\mathscr{A}_M)$ と記す. 即ち, $\mathscr{A}=\mathscr{O}_X|_M$ である.

命題 2.1.2. $0\to\tau^{-1}\mathscr{A}\to\tilde{\mathscr{A}}\to\mathscr{Q}\to 0$

は $\sqrt{-1}\,SM$ 上の層の完全系列である．

［証明］ $\mathscr{O}_{X,0}=\mathscr{A}_{M,0}=(\tau^{-1}\mathscr{A})_{0+\sqrt{-1}v_0 0}$ および $\varinjlim_{0+\sqrt{-1}v_0 0\in\tilde{U}}\mathscr{O}_X(\tilde{U}-\sqrt{-1}SM)=\tilde{\mathscr{A}}_{0+\sqrt{-1}v_0 0}$(定義 2.1.2 の後の注意参照)に注意すれば，$\mathscr{Q}$ の定義と(2.1.3)より明らかである．

注意. 命題 2.1.2 は $\mathscr{Q}$ は $\tilde{\mathscr{A}}$ の元の特異性を記述する層であると考えることができることを示している．

さて $T^*X|_M=T^*M\oplus\sqrt{-1}\,T^*M$, 即ち $x\in M$ に対して $T_x{}^*X=T_x^*M\oplus\sqrt{-1}\,T_x^*M$ であるから $T_M^*X=\sqrt{-1}\,T^*M, S_M^*X=\sqrt{-1}\,S^*M$ と考えられる．$x\in M$, $\eta\in T_x^*M-\{0\}$ の時，$(x, \sqrt{-1}\,\eta\infty)\in\sqrt{-1}\,S^*M$ により $\sqrt{-1}\,\eta$ に対応する点を表わすことにする．ここで ∞ の記号は，$\sqrt{-1}\,SM$ の点 $(x, \sqrt{-1}\,\xi)$ を $x+\sqrt{-1}\,\xi 0$ に対応させたことの双対として用いられている．なお，以下において余接束上の点であることをはっきりさせたい場合，$(x, \sqrt{-1}\,\eta\infty)$ の代わりに $(x, \sqrt{-1}\langle\eta, dx\rangle\infty)$ という記号を用いることもある．

定義 2.1.4. $DM \underset{\text{def}}{=} \{(x+\sqrt{-1}\,v0,\ (x, \sqrt{-1}\,\eta\infty))\in\sqrt{-1}\,SM\underset{M}{\times}\sqrt{-1}S^*M \mid \langle v, \eta\rangle\leqq 0\}$*⁾.

定義 2.1.5. **対蹠点作用素** $a:\sqrt{-1}S^*M\to\sqrt{-1}\,S^*M$ を

$$(x, \sqrt{-1}\,\eta\infty)\mapsto(x,\ -\sqrt{-1}\,\eta\infty)$$

によって定義する．$\mathscr{F}$ を $\sqrt{-1}\,S^*M$ 上の層とする時，$\mathscr{F}^a$ を $\mathscr{F}^a=a_*\mathscr{F}(=a^{-1}\mathscr{F})$ と定義して，$\mathscr{F}$ の対蹠像と呼ぶ．$\mathscr{F}^a_{(x,\sqrt{-1}\eta\infty)}=\mathscr{F}_{(x,-\sqrt{-1}\eta\infty)}$ である．

定義 2.1.6. X, Y を位相空間，$f\colon X\to Y$ を連続写像とする．$\mathscr{F}$ を X 上の層とする時，Y の開集合 U に $H^k(f^{-1}(U), \mathscr{F})$ を対応させて得られる前層に付随した層を $R^kf_*(\mathscr{F})$ と記す．

注意. $k=0$ ならば $R^kf_*(\mathscr{F})$ は順像 $f_*(\mathscr{F})$ に等しい．

定義 2.1.7. X, Y を位相空間とする時，X 上の層 $\mathscr{F}$ に関して連続写像 $f\colon X\to Y$ が**純 r 次元的** (purely r-dimensional) とは，$j\neq r$ なる限り

---

*) D は disk bundle の頭文字を取ったもの．Demisphère の頭文字とも言える．

$R^j f_*(\mathscr{F})=0$ が成り立つことを謂う．

命題 2.1.2′. $\tau: DM \to \sqrt{-1}\, S^*M$ は $\pi^{-1}\mathcal{Q}$ に関して純 $(n-1)$ 次元的である．即ち，$k \neq n-1$ なる限り $R^k\tau_*\pi^{-1}\mathcal{Q}=0$ が成立する(図 2.1.3 参照)．

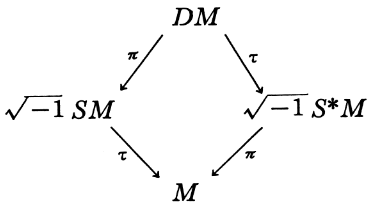


図 2.1.3.

この命題の証明は少々面倒である．この節ではあるコホモロジー群の消滅定理を仮定して命題 2.1.2′ の証明を与えることにする(後述命題 2.1.6 の後の注意を参照されたい)．必要とされる消滅定理は次節で M の $\mathcal{O}_X$ に関する純 n 余次元性と共に完全に証明される．

さて以上の準備の下に microfunction の層 $\mathscr{C}_M$ を定義しよう．

定義 2.1.8. $\mathscr{C}_M \underset{\text{def}}{=} (R^{n-1}\tau_*\pi^{-1}\mathcal{Q})^a \otimes \pi^{-1}\omega_M$.

$\mathscr{C}_M$ の断面を **microfunction** と謂う．その茎は $\mathscr{C}_{M,(x,\sqrt{-1}\xi\infty)}=(R^{n-1}\tau_*\pi^{-1}\mathcal{Q})_{(x,-\sqrt{-1}\xi\infty)}\otimes\omega_{M,x}$ である(写像τ, π については上図 2.1.3 参照)．

さて命題 2.1.2′ を証明する為，次の準備を行おう．

定義 2.1.9. $\mathscr{F}$ を X 上の層とする．各点 $x(\in X)$ の茎の集合 $F=\bigsqcup_{x\in X}\mathscr{F}_x$ に対して，X の開集合 U とその上の断面 $s\in\Gamma(U,\mathscr{F})$ に対して得られる F の部分集合 $\{s_x | x\in U\}$ を開集合の基 (base) にとって F の位相を定めた時，F を層 $\mathscr{F}$ の**層空間** (sheaf space) と謂う．写像 $\varpi: F\to X$ を $\varpi(x')=x$ $(x'\in\mathscr{F}_x)$として定義する．明らかに ϖ は連続である．

この定義のもとで次の事実が成立する．

(a)　ϖ は局所同相である．即ち，任意の $y\in F$ に対して y の近傍 Uを適当にとれば，$\varpi(y)$ の近傍 Vが存在して $\varpi: U\to V$ は同相になる．

これは F の位相の入れ方より明らかである．

(b)　$\mathscr{G}(U)=\{f\,|\,f: U\to F$ 連続，かつ $\varpi\circ f=\mathrm{id}_U\}$ と置くと実は $\mathscr{G}(U)\cong$

$\mathscr{F}(U)$ である．対応は $s\in\mathscr{F}(U)$ に対して $f\colon U\to F$ を $f(x)=s_x$ と定めればよい．実際，f の連続性により x の近傍 U' を適当にとれば $s'\in\mathscr{F}(U')$ が存在して，$x'\in U'$ に対して $f(x')=s'_{x'}$ となる．従って $\mathscr{F}_x\cong\varinjlim_{U\ni x}\mathscr{G}(U)$，即ち，$0\to\mathscr{F}\to\mathscr{G}\to 0$ (完全)，故に $0\to\mathscr{F}(U)\to\mathscr{G}(U)\to 0$ は完全となる(第1章命題1.1.2の(1)の(i)参照)．

逆に F, X を位相空間として，$\varpi\colon F\to X$ を局所同相な全射とすれば，X の開集合 U に $\{f\mid f\colon U\to F$ 連続，かつ $\varpi\circ f=\mathrm{id}_U\}$ を対応させることにより X 上の層 $\mathscr{F}$ が得られ，その層空間は F になる．従って層空間と層は一対一に対応する．特に X の任意の部分集合 A に対してその上の断面が $\{f|f\colon A\to F$ 連続，かつ $\varpi\circ f=\mathrm{id}_U\}$ で定義できる．さて $f\colon X\to Y$ を連続写像，$\mathscr{F}$ を Y 上の層，F を $\mathscr{F}$ の層空間としよう．その時 $f^{-1}\mathscr{F}$ の層空間は X と F のファイバー積 $X\underset{Y}{\times}F=\{(x,x')\in X\times F|f(x)=\varpi(x')\}$ となることは容易に判る．Z を Y の閉集合とする時，$s\in\Gamma_Z(Y,\mathscr{F})$ は $s\colon Y\to F$ なる連続写像で $y\notin Z$ に対し $s(y)=0(\in\mathscr{F}_y)$ となるものであるから，$\tilde{s}\colon X\to X\times F$ なる写像を $\tilde{s}(x)=(x, s\circ f(x))\in X\times F$ と定義すれば，これは連続で，かつ $\varpi\circ\tilde{s}=\mathrm{id}_X$．従って $\tilde{s}\in\Gamma_{f^{-1}(Z)}(X,f^{-1}\mathscr{F})$ である．即ち，$\Gamma_Z(Y,\mathscr{F})\to\Gamma_{f^{-1}(Z)}(X,f^{-1}\mathscr{F})$ なる規準的な写像が得られた．今，

図 2.1.4.

$$\begin{array}{ccc} X\underset{Y}{\times}F & \xrightarrow{\tilde{f}} & F \\ {\scriptstyle\varpi}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle\varpi} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

$0\to\mathscr{F}\to\mathscr{L}^0\to\mathscr{L}^1\to\cdots$ を $\mathscr{F}$ の脆弱分解とすれば $0\to f^{-1}\mathscr{F}\to f^{-1}\mathscr{L}^0\to f^{-1}\mathscr{L}^1\to\cdots$ は完全ではあるが，一般には $f^{-1}\mathscr{L}^i$ $(i=0,1,\cdots)$ が脆弱層になるとは限らない．そこで第1章§1定理1.1.1の証明の中の補題1を用いて

$$\begin{array}{ccccccc} 0\longrightarrow & f^{-1}\mathscr{F} & \longrightarrow & f^{-1}\mathscr{L}^0 & \longrightarrow & f^{-1}\mathscr{L}^1 & \longrightarrow \\ & \| & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \\ 0\longrightarrow & f^{-1}\mathscr{F} & \longrightarrow & \mathscr{M}^0 & \longrightarrow & \mathscr{M}^1 & \longrightarrow \end{array}$$

となる $f^{-1}\mathscr{F}$ の脆弱分解 $\mathscr{M}^*$ をとると，次の可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} 0\longrightarrow & \Gamma_Z(Y,\mathscr{L}^0) & \longrightarrow & \Gamma_Z(Y,\mathscr{L}^1) & \longrightarrow & \Gamma_Z(Y,\mathscr{L}^2) & \longrightarrow\cdots\cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0\longrightarrow & \Gamma_{f^{-1}(Z)}(X,f^{-1}\mathscr{L}^0) & \longrightarrow & \Gamma_{f^{-1}(Z)}(X,f^{-1}\mathscr{L}^1) & \longrightarrow & \Gamma_{f^{-1}(Z)}(X,f^{-1}\mathscr{L}^2) & \longrightarrow\cdots\cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0\longrightarrow & \Gamma_{f^{-1}(Z)}(X,\mathscr{M}^0) & \longrightarrow & \Gamma_{f^{-1}(Z)}(X,\mathscr{M}^1) & \longrightarrow & \Gamma_{f^{-1}(Z)}(X,\mathscr{M}^2) & \longrightarrow\cdots\cdots \end{array}$$

を得る．従って我々は $H^k_Z(Y,\mathscr{F})\to H^k_{f^{-1}(Z)}(X,f^{-1}\mathscr{F})$ なる写像を構成できる．この時，

$$
\begin{array}{ccccccc}
\cdots\to H^k_Z(Y,\mathscr{F}) & \longrightarrow & H^k(Y,\mathscr{F}) & \longrightarrow & H^k(Y-Z,\mathscr{F}) & \longrightarrow & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots\to H^k_{f^{-1}(Z)}(X,f^{-1}\mathscr{F}) & \longrightarrow & H^k(X,f^{-1}\mathscr{F}) & \longrightarrow & H^k(X-f^{-1}(Z),f^{-1}\mathscr{F}) & \longrightarrow & \\
 & & & \longrightarrow & H^{k+1}_Z(Y,\mathscr{F}) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & \longrightarrow & H^{k+1}_{f^{-1}(Z)}(X,f^{-1}\mathscr{F}) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}
$$

は可換になることは作り方より明らかである．よって次の命題 2.1.3 の(1)が証明された．

命題 2.1.3.　X, Y を位相空間，$f\colon X\to Y$ を連続写像とする．$\mathscr{F}$ を Y 上の層，Z を Y の閉集合とすると

(1)　写像 $H^k_Z(Y,\mathscr{F})\to H^k_{f^{-1}(Z)}(X,f^{-1}\mathscr{F})$ が定義できて

$$
\begin{array}{ccccc}
\cdots\to H^k_Z(Y,\mathscr{F}) & \longrightarrow & H^k(Y,\mathscr{F}) & \longrightarrow & H^k(Y-Z,\mathscr{F})\to\cdots \\
\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\
\cdots\to H^k_{f^{-1}(Z)}(X,f^{-1}\mathscr{F}) & \longrightarrow & H^k(X,f^{-1}\mathscr{F}) & \longrightarrow & H^k(X-f^{-1}(Z),f^{-1}\mathscr{F})\to\cdots
\end{array}
$$

は可換になる．

(2)　f が全射的開写像で各ファイバー $f^{-1}(y)$ $(y\in Y)$ が連結ならば，$\Gamma_Z(Y,\mathscr{F})$ と $\Gamma_{f^{-1}(Z)}$ $(X,f^{-1}\mathscr{F})$ は同型である．

(3)　特に f が同相写像 (homeomorphism) ならば

$$H^k_Z(Y,\mathscr{F})=H^k_{f^{-1}(Z)}(X,f^{-1}\mathscr{F})$$

［証明］　(1)は既に証明したから(2)を示そう．$s\in\Gamma_Z(Y,\mathscr{F})$ の $\Gamma_{f^{-1}(Z)}(X, f^{-1}\mathscr{F})$ への像を $\tilde{s}$ とする．$\mathscr{F}$ の層空間を F とすると $s\colon Y\to F$ に対して $\tilde{s}\colon X\to X\underset{Y}{\times}F$ は $\tilde{s}(x)=(x, s\circ f(x))$ 故 $\tilde{s}\colon X\to F$ と考えてよい．f は全射的だから，任意の $y\in Y$ に対して，$y=f(x)$ となる $x\in X$ が存在する．従って $\tilde{s}_1=\tilde{s}_2$ とすれば，$s_1(y)=s_1\circ f(x)=\tilde{s}_1(x)=\tilde{s}_2(x)=s_2\circ f(x)=s_2(y)$，従って $s_1=s_2$．即ち，$s\mapsto\tilde{s}$ なる写像は単射的である．次にこれが全射的であることを示そう．$\tilde{s}\colon X\to F$ に対して $s\colon Y\to F$ を $f(x)=y$ となる x を用いて $s(y)=\tilde{s}(x)$，として定義する．これが x のとり方によらず well-defined であることを先ず示そう．$f(x_0)=y$ なる x_0 を一つ固定し $\{x\in f^{-1}(y)\,|\,\tilde{s}(x)=\tilde{s}(x_0)\}=\tilde{s}^{-1}(\tilde{s}(x_0))$ を考えると $\tilde{s}$ は連続故，これは閉集合であるが，実は開集合にもなっている．何故ならば ϖ は局所同相ゆえ，$\varpi^{-1}(y)$ は離散的であり $f^{-1}(y)\overset{\tilde{s}}{\to}\varpi^{-1}(y)$ は連続，即ち，$\varpi^{-1}(y)$ の一点の逆像 $\tilde{s}^{-1}(\tilde{s}(x_0))$ は開集合．仮定より $f^{-1}(y)$ は連結だから $f^{-1}(y)=\tilde{s}^{-1}(\tilde{s}(x_0))$ を得る．

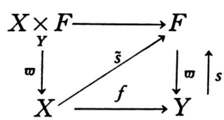


図 2.1.5.

よって写像 $s: Y\to F$ が一意的に定義された．これが連続になることを示そう．UをFの開集合とすると $s^{-1}(U)=f(f^{-1}(s^{-1}(U))=f(\tilde{s}^{-1}(U))$ であり，又 $\tilde{s}^{-1}(U)$ は開集合．他方，仮定により f は開写像であるから $s^{-1}(U)=f(\tilde{s}^{-1}(U))$ は開集合である．従って s は連続である．

(3)を示そう．f が同相写像なら，$0\to\mathcal{F}\to\mathcal{L}^0\to\mathcal{L}^1\to\cdots$ なる脆弱分解に対し $0\to f^{-1}\mathcal{F}\to f^{-1}\mathcal{L}^0\to f^{-1}\mathcal{L}^1\to\cdots$ は $f^{-1}\mathcal{F}$ の脆弱分解であるから(2)より

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \Gamma_Z(Y,\mathcal{L}^0) & \longrightarrow & \Gamma_Z(Y,\mathcal{L}^1) & \longrightarrow & \Gamma_Z(Y,\mathcal{L}^2)\to\cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \Gamma_{f^{-1}(Z)}(X,f^{-1}\mathcal{L}^0) & \longrightarrow & \Gamma_{f^{-1}(Z)}(X,f^{-1}\mathcal{L}^1) & \longrightarrow & \Gamma_{f^{-1}(Z)}(X,f^{-1}\mathcal{L}^2)\to\cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0\longrightarrow\cdots
\end{array}$$

を得る．よって $H^k_Z(Y,\mathcal{F})=H^k_{f^{-1}(Z)}(X,f^{-1}\mathcal{F})$ を得る．　　(証終)

命題 2.1.4.*) 位相空間 X のすべての開集合がパラコンパクトかつハウスドルフ (Hausdorff) であるとする．S を X の任意の部分集合とする時，$H^k(S,\mathcal{F}|_S)=\varinjlim_{U\supset S} H^k(U,\mathcal{F})$ が成り立つ．

[証明]　まず $\Gamma(S,\ \mathcal{F}|_S)=\varinjlim_{W\supset S}\Gamma(W,\mathcal{F})$ を示そう．

$s_1\in\Gamma(W_1,\mathcal{F})$ および $s_2\in\Gamma(W_2,\mathcal{F})$ に対し，それ等の $\Gamma(s,\mathcal{F}|_S)$ への像 $s_1|_S$ および $s_2|_S$ が等しいとする．j を $S\hookrightarrow X$ なる埋込み写像とすれば，定義により任意の $x\in S$ に対して $(\mathcal{F}|_S)_x=(j^{-1}\mathcal{F})_x=\mathcal{F}_x$ が成り立つから $s_{1x}=s_{2x}$ が成立する．よって x の近傍 $W(x)(\subset W_1\cap W_2)$ が存在して $s_1|_{W(x)}=s_2|_{W(x)}$ となる．$W=\bigcup_{x\in S}W(x)$ と置くとこれは S の近傍であり，しかも $s_1|_W=s_2|_W$, $W\subset W_1\cap W_2$ となる．従って $\varinjlim_{W\supset S}\Gamma(W,\mathcal{F})\to\Gamma(S,\mathcal{F}|_S)$ という写像は単射的である．次にこの写像が全射的であることを示そう．$s\in\Gamma(S,\mathcal{F}|_S)$, $x\in S$ に対して $s_x\in(j^{-1}\mathcal{F})_x=\mathcal{F}_x$ であったから x の X における近傍 $W(x)$ と $\tilde{s}\in\Gamma(W(x),\mathcal{F})$ が存在して $\tilde{s}_x=s_x(x\in S\cap W(x))$ となる．そこで $S\subset\bigcup_{x\in S}W(x)$ なる被覆ができるから，パラコンパクト性の仮定を用いてそれよりその局所有限な細分を見出すことが出来る．それを $\{U_i\}_{i\in I}$ としよう．この時 $s_i\in\Gamma(U_i,\mathcal{F})$ が存在して $s_{i,x}=\tilde{s}_x$ $(x\in S\cap U_i)$ となる．更に命題の内容から $X=\bigcup_i U_i$ としても一般性を失うこ

---

*)　X がパラコンパクト，S が X の閉集合としても命題は成り立つが証明を簡単にする為に，こう仮定する．例えば X が距離空間ならば命題の仮定はすべて満たされる．

とはない．X はパラコンパクトなハウスドルフ空間故，正規空間である．従って $X=\bigcup_i U_i$ が局所有限被覆故，$X=\bigcup_i V_i, \overline{V}_i\subset U_i$ となる被覆 $\{V_i\}$ を見つけることが出来る．このような $\{V_i\}$ に対し $W=\{x\in X \mid x$ が $\overline{V}_i\cap\overline{V}_j$ に属するならば $s_{i_x}=s_{j_x}\}$ と定義して，これが S の近傍になっていることを示そう．局所有限という仮定から $x\in S$ の近傍 U とある $(i_1,\cdots,i_N)$ が存在して $U\cap\overline{V}_i=\phi$ $(i\neq i_1,\cdots,i_N)$ となるものが存在する．$x\notin\overline{V}_i$ なら U のかわりに $U-\overline{V}_i$ をとればよいから $x\in U\cap\overline{V}_i (i=i_1,\cdots,i_N)$ としてよい．この時 x の近傍 V を十分小さくとれば，$s_{i_\mu}|_V=s_{i_\nu}|_V$ $(\mu,\nu=1,\cdots,N)$ ととれる．従って $S\subset\Omega\subset W$ なる開集合 Ω が存在するから層の定義により $\tilde{s}\in\Gamma(\Omega,\mathscr{F})$ で $\tilde{s}|_{V_i\cap\Omega}=s_i|_{V_i\cap\Omega}$ なるものが存在し $\tilde{s}_x=s_x (x\in S)$ を満たす．従って，先ず

$$\Gamma(S,\mathscr{F}|_S)=\varinjlim_{W\supset S}\Gamma(W,\mathscr{F})$$

が言えた．

次に高次のコホモロジー群を論じよう．まず $0\to\mathscr{F}\to\mathscr{L}^0\to\mathscr{L}^1\to\cdots$ を $\mathscr{F}$ の脆弱分解としよう．

$\mathscr{L}^i|_S$ がすべての開集合がパラコンパクトかつハウスドルフと云う仮定のもとでは脆弱層になることを示そう．V を X の任意の開集合とすると，

$$\Gamma(V\cap S,\mathscr{L}^i|_S)=\varinjlim_{W\supset V\cap S}\Gamma(W,\mathscr{L}^i)$$

であるから，$s\in\Gamma(V\cap S,\mathscr{L}^i|_S)$ は $V\cap S$ を含むある開集合 W 上の $\mathscr{L}^i$ の断面へ拡張される．然るに $\mathscr{L}^i$ は脆弱層故，更にその断面は X 全体にまで拡張される．明らかにその $\Gamma(S,\mathscr{L}^i|_S)$ への像の $V\cap S$ への制限は s になっている．従って $0\to\mathscr{F}|_S\to\mathscr{L}^0|_S\to\mathscr{L}^1|_S\to\cdots$ は $\mathscr{F}|_S$ の脆弱分解である．従って

$$\begin{aligned}\varinjlim_{U\supset S}H^k(U,\mathscr{F})=\varinjlim_{U\supset S}H^k(\Gamma(U,\mathscr{L}^*))=H^k(\varinjlim_{U\supset S}\Gamma(U,\mathscr{L}^*))=H^k(\Gamma(S,\mathscr{L}^*|_S))\\ =H^k(S,\mathscr{F}|_S)\quad(k\geqq 0)\end{aligned}$$

を得る．（証終）

系． X を，その開部分集合がすべてパラコンパクトかつハウスドルフであるような位相空間とする．$\mathscr{F}$ を X 上の層，$f:X\to Y$ を連続な閉写像とする時，任意の $y\in Y$ に対して

$$R^kf_*(\mathscr{F})_y=H^k(f^{-1}(y),\mathscr{F}|_{f^{-1}(y)})$$

が，すべての k について成立する．

［証明］　U を $f^{-1}(y)$ の開近傍とすれば，f が閉写像故，$V \underset{\text{def}}{=} Y-f(X-U)$ は y の開近傍であって，しかも $f^{-1}(V) \subset U$ となる．従って命題 2.1.4. より

$$H^k(f^{-1}(y), \mathscr{F}|_{f^{-1}(y)}) = \varinjlim_{U \supset f^{-1}(y)} H^k(U, \mathscr{F})$$

$$= \varinjlim_{V \ni y} H^k(f^{-1}(V), \mathscr{F}) = R^k f_*(\mathscr{F})_y$$

を得る．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証終）

定義 2.1.10.　連続写像 $f\colon X \to Y$ が次の条件(1)，(2)を満たす時，f を**固有写像** (proper map) と謂う．

(1)　各点 $y \in Y$ のファイバー $f^{-1}(y)$ はコンパクト．

(2)　f は閉写像である．即ち X の閉集合を Y の閉集合に移す．

注意．　上述の系は，X, Y をハウスドルフ空間，$f\colon X \to Y$ を固有写像としても成り立つことは明らかであろう．

命題 2.1.5.　$\tau\colon DM \to \sqrt{-1}S^*M$ は固有写像である．

［証明］　まずいくつかの補題を準備する．

補題 1.　X, Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ を連続写像とする時，次の(1)と(2)は同値である．

(1)　f は閉写像である．

(2)　各点 $y \in Y$ に対し $f^{-1}(y)$ の近傍 U を与えれば，y の近傍 V が存在して $f^{-1}(V) \subset U$ となる．即ち，$\{f^{-1}(V) \mid V$ は y の基本近傍系$\}$ は $f^{-1}(y)$ の基本近傍系をなす．

［証明］　$V = Y-f(X-U)$ とすれば(2)が(1)から従うことは明らか．逆を証明しよう．$A(\subset X)$ を閉集合とする．$y \notin f(A)$ とすれば $A \cap f^{-1}(y) = \phi$ 故，$X-A \supset f^{-1}(y)$，従って y の近傍 V が存在して $f^{-1}(V) \subset X-A$，即ち，$V \cap f(A) = \phi$ となり $f(A)$ は閉集合である．よって(1)は(2)より従う．（補題 1 の証終）

補題 2.　右図 2.1.6 において f が固有写像ならば f' も固有写像である．但し，ここで $X \underset{Y}{\times} Y'$ は写像 $f\colon X \to Y$ および $g\colon Y' \to Y$ に関するファイバー積であり，写像 g', f' は各々 $g'(x, y') = x$,　$f'(x, y') = y'$　$((x, y') \in X \underset{Y}{\times} Y')$ により定める．

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\;g'\;} & X \underset{Y}{\times} Y' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ Y & \xleftarrow[\;g\;]{} & Y' \end{array}$$

図 2.1.6.

［証明］ $y'\in Y'$ に対して $f'^{-1}(y')=\{(x, y')\in X\times Y' | f(x)=g(y')\}\cong f^{-1}(g(y'))$ であり，しかも f は固有写像であるから $f'^{-1}(y')$ はコンパクトである．従って f' が閉写像であることを言えば十分である．補題1によって $y'\in Y'$ と $f'^{-1}(y')$ の近傍 U が与えられた時，y' の近傍 U' で $f'^{-1}(U')\subset U$ となるものが存在することを示せばよい．$x'\in f'^{-1}(y')$ に対して $x=g'(x')$，$y=g(y')$ とおく．$X\underset{Y}{\times} Y'$ の位相の定義から $x=g'(x')$ の近傍 $W(x')$ と y' の近傍 $V(x')$ が存在して $g'^{-1}W(x')\cap f^{-1}V(x')\subset U$ となる．$\bigcup_{x'\in f'^{-1}(y')} W(x')\supset f^{-1}(y)$ であるが，$f^{-1}(y)$ はコンパクトだから有限個の $x_1, \cdots, x_N\in f'^{-1}(y')$ が存在して $W=\bigcup_{i=1}^{N} W(x_i)\supset f^{-1}(y)$ となる．そこで $V=\bigcap_{i=1}^{N} V(x_i)$ とおけば，これも y' の近傍であり，しかも $f'^{-1}(y')\subset g'^{-1}(W)\cap f'^{-1}(V)\subset U$ である．f は閉写像故，y の近傍 V' が存在して $f^{-1}(y)\subset f^{-1}(V')\subset W$ となるから，$g'^{-1}(W)\supset g'^{-1}f^{-1}(V')=f'^{-1}g^{-1}(V')$ となる．従って $U'=V\cap g^{-1}(V')$ とおけば，これは y' の近傍で $f'^{-1}(U')\subset U$ となる．　（補題2の証終）

補題 3.　$f:X\to Y$ が固有写像であり，Y がコンパクトならば X もコンパクトである．

［証明］ $X=\bigcup_{i\in I} U_i$ を X の任意の開被覆とする．各点 y について $f^{-1}(y)$ はコンパクトで $f^{-1}(y)\subset\bigcup_{i\in I} U_i$ 故 I の有限部分集合 $I(y)$ があって $f^{-1}(y)\subset\bigcup_{i\in I(y)} U_i$ となるが f は閉写像故，補題により y の近傍 $V(y)$ で $f^{-1}(V(y))\subset\bigcup_{i\in I(y)} U_i$ となるものが存在する．$\bigcup_{y\in Y} V(y)$ は Y の開被覆であり，しかも Y はコンパクトであるから $Y=\bigcup_{i=1}^{N} V(y_i)$ となる $y_1, \cdots, y_N$ が存在する．その時 $X=\bigcup_{i\in\bigcup_{j=1}^{N} I(y_j)} U_i$ は X の有限被覆である．　（補題3の証終）

補題 4.　$X\xrightarrow{f} Y\xrightarrow{g} Z$ において f と g が固有写像ならば，その合成 $g\circ f$ も固有写像である．

［証明］ f, g が閉写像ならば，明らかに $g\circ f$ も閉写像であるから，$z\in Z$ に対して $f^{-1}g^{-1}(z)$ がコンパクトであることを言えばよい．それには補題3によって $f:f^{-1}g^{-1}(z)\to g^{-1}(z)$ が固有写像であることを言えばよいが，それは補題2より明らかである．　（補題4の証終）

補題 5.　$\sqrt{-1}SM\xrightarrow{\tau} M$ は固有写像である．

［証明］ 補題1に注意すれば τ が固有写像であるかどうかは M 上で局所的な性質である(即ち，$X \xrightarrow{f} Y$ を連続写像，$Y=\bigcup_{i\in I} U_i$ を Y の開被覆とする時，f が固有写像であることは $f: f^{-1}(U_i)\to U_i$ がすべての $i\in I$ について固有写像であることと同値である)．従って，$\sqrt{-1}SM$ は $S^{n-1}\times M$ と同型と考えても構わない．M の点 x に対し $S^{n-1}\to x$ なる写像は明らかに固有写像であるから，補題2により τ が固有写像であることが判る． (補題5の証終)

さて以上の準備の下に命題 2.1.5 の証明に入ろう．まず下の可換図式を考えよう．

この可換図式において補題5により p_2 は固有写像だから補題2により p_1 も固有写像である．また，ι は明らかに固有写像である．従って補題4により

$$\begin{array}{ccccc} DM & \overset{\iota}{\hookrightarrow} & \sqrt{-1}SM\underset{M}{\times}\sqrt{-1}S^*M & \longrightarrow & \sqrt{-1}SM \\ & \underset{\tau}{\searrow} \ \circlearrowleft & \downarrow p_1 & \circlearrowleft & \downarrow p_2 \\ & & \sqrt{-1}S^*M & \xrightarrow[\pi]{} & M \end{array}$$

$\tau=p_1\circ\iota$ も固有写像である． (証終)

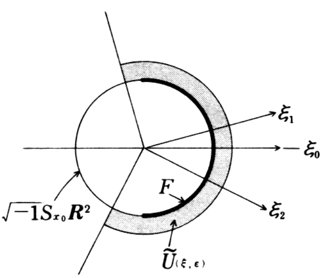
さて命題 2.1.4 の系と命題 2.1.5 を合わせて*)

$$(R^k\tau_*\pi^{-1}\mathcal{O})_{(x_0,\sqrt{-1}\xi_0\infty)}=H^k(\tau^{-1}(x_0,\sqrt{-1}\xi_0\infty),\ \pi^{-1}\mathcal{O}|_{\tau^{-1}(x_0,\sqrt{-1}\xi_0\infty)})$$

を得る．更にこのコホモロジー群を正則函数により密着したものに書き直そう(以下の命題 2.1.6)．

まず $\pi: \tau^{-1}(x_0,\sqrt{-1}\xi_0\infty)\xrightarrow{\sim}\pi\tau^{-1}(x_0,\sqrt{-1}\xi_0\infty)$ は同相写像故命題 2.1.3の(3)により $H^k(\tau^{-1}(x_0,\sqrt{-1}\xi_0\infty),\pi^{-1}\mathcal{O}|_{\tau^{-1}(x_0,\sqrt{-1}\xi_0\infty)})=H^k(F,\mathcal{O}|_F)$を得る．但し$F=$

(図 2.1.7. ${}^{R^2}\widetilde{C}^2$ の x_0 での切り口の図)



---

*) 命題 2.1.4 のパラコンパクト性に関する仮定は，M について局所的に論ずる限り，以下の議論では常に満たされている．

$\pi^{-1}\tau(x_0,\sqrt{-1}\xi_0\infty)=\{x+\sqrt{-1}v0\in\sqrt{-1}SM\,|<v,\xi_0>\leqq 0\}$ とした. 他方命題 2.1.4 により $H^k(F,\mathcal{Q})=\varinjlim_{F\subset U\subset \widetilde{M}_X} H^k(\tilde{U},\mathcal{H}^1_{\sqrt{-1}SM}(\tau^{-1}\mathcal{O}_X))$ であり, 更に命題 2.1.1 と第1章§1 命題 1.1.6 により, これは $\varinjlim_{F\subset\tilde{U}} H^{k+1}_{\sqrt{-1}SM\cap U}(\tilde{U},\tau^{-1}\mathcal{O}_X)$ に等しい. 問題は M 上では局所的だから $M=\boldsymbol{R}^n$ としても一般性を失なうことはない. $M=\boldsymbol{R}^n$ として F の近傍 $\tilde{U}_{(\xi,\varepsilon)}$ を構成しよう. n 個の実 n-ベクトル ξ_j $(1\leqq j\leqq n)$ を $\xi_1,\cdots,\xi_n$ と ξ_0 の凸包が原点の近傍を含むようにとろう. その時 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, および $\varepsilon>0$ に対して $\tilde{U}_{(\xi,\varepsilon)}=\{x+\sqrt{-1}y\in X\,|\,|x-x_0|<\varepsilon,$ $|y|<\varepsilon$, 或る $j(1\leqq j\leqq n)$ に対して $<y,\xi_j>>0\}\ \cup\{x+\sqrt{-1}v0\in\sqrt{-1}SM\,|$ $|x-x_0|<\varepsilon$ かつ或る $j(1\leqq j\leqq n)$ に対して $<v,\xi_j>>0\}$ と定めればこれは F の近傍になっており, $\xi_1,\cdots,\xi_n$ を $-\xi_0$ の近傍で, 又 ε を 0 の近傍で動かすことによって F の基本近傍系をなす(図 2.1.7($n=2$ の場合)を参照). その時, $\xi_j\to -\xi_0$, $\varepsilon\downarrow 0$ とすれば斜線の部分は F に近付く.

さて $U_\varepsilon=\{x+\sqrt{-1}y\in X\,|\,|y|<\varepsilon,\ |x-x_0|<\varepsilon\}$, $Z_{(\xi,\varepsilon)}=\{x+\sqrt{-1}y\in U_\varepsilon\,|$ 任意の $j(1\leqq j\leqq n)$ に対して $<y,\xi_j>\leqq 0\}$ とおく時次の補題が成り立つ.

補題. $\tilde{U}_{(\xi,\varepsilon)}\cap\tau^{-1}(Z_{(\xi,\varepsilon)})=\tilde{U}_{(\xi,\varepsilon)}\cap\sqrt{-1}SM$, 但し $\tau:{}^{M}\widetilde{X}\to X$ とする.

［証明］ $x+\sqrt{-1}v0\in\tilde{U}_{(\xi,\varepsilon)}\cap\sqrt{-1}SM$ とすれば, $x\in Z_{(\xi,\varepsilon)}$ 故, $x+\sqrt{-1}v0\in(\sqrt{-1}SM)_x=\tau^{-1}(x)\subset\tau^{-1}(Z_{(\xi,\varepsilon)})$, 即ち $\tilde{U}_{(\xi,\varepsilon)}\cap\sqrt{-1}SM\subset$ $\tilde{U}_{(\xi,\varepsilon)}\cap\tau^{-1}(Z_{(\xi,\varepsilon)})$ となる. $x+\sqrt{-1}y\notin\sqrt{-1}SM$ かつ $x+\sqrt{-1}y\in\tilde{U}_{(\xi,\varepsilon)}\cap$ $\tau^{-1}(Z_{(\xi,\varepsilon)})$ とすると, 一方では或る $j(1\leqq j\leqq n)$ に対して $<v,\xi_j>>0$ となり, 同時に他方では任意の $j(1\leqq j\leqq n)$ に対して $<v,\xi_j>\leqq 0$ となり矛盾である.

(証終)

さて命題 2.1.3 の(1)において $X=\tilde{U}_{(\xi,\varepsilon)}$, $Y=U_\varepsilon$, $f=\tau|_{\tilde{U}_{(\xi,\varepsilon)}}$, $Z=Z_{(\xi,\varepsilon)}$, Y 上の層 $\mathcal{F}$ として $\mathcal{O}_X$ をとれば, この補題により $f^{-1}(Z)=\sqrt{-1}SM\cap\tilde{U}_{(\xi,\varepsilon)}$ であるから次の可換図式

(2.1.4)
$$\begin{array}{ccccc}
\cdots\to H^{k-1}(U_\varepsilon,\mathcal{O}_X) & \longrightarrow & H^{k-1}(U_\varepsilon-Z_{(\xi,\varepsilon)},\mathcal{O}_X) & \longrightarrow & \\
\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \\
\cdots\to H^{k-1}(\tilde{U}_{(\xi,\varepsilon)},\tau^{-1}\mathcal{O}_X) & \to & H^{k-1}(\tilde{U}_{(\xi,\varepsilon)}-\sqrt{-1}SM,\tau^{-1}\mathcal{O}_X) & \to &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\to H^k_{Z_{(\xi,\varepsilon)}}(U_\varepsilon,\mathcal{O}_X) & \longrightarrow & H^k(U_\varepsilon,\mathcal{O}_X) & \longrightarrow & H^k(U_\varepsilon-Z_{(\xi,\varepsilon)},\mathcal{O}_X)\to\cdots \\
\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\
\to H^k_{\sqrt{-1}SM\cap\tilde{U}_{(\xi,\varepsilon)}}(\tilde{U}_{(\xi,\varepsilon)},\tau^{-1}\mathcal{O}_X) & \longrightarrow & H^k(\tilde{U}_{(\xi,\varepsilon)},\tau^{-1}\mathcal{O}_X) & \to & H^k(\tilde{U}_{(\xi,\varepsilon)}-\sqrt{-1}SM,\tau^{-1}\mathcal{O}_X)\to\cdots
\end{array}$$

(完全)

を得る.

ここで $\tilde{U}_{(\xi,\varepsilon)}-\sqrt{-1}SM\cong U_\varepsilon-Z_{(\xi,\varepsilon)}$ であるから命題 2.1.3 の(3)により

$$H^k(U_\varepsilon-Z_{(\xi,\varepsilon)},\mathcal{O}_X)=H^k(\tilde{U}_{(\xi,\varepsilon)}-\sqrt{-1}SM,\ \tau^{-1}\mathcal{O}_X)$$

である．更に

$$\varinjlim_{U_\varepsilon\ni x_0} H^k(U_\varepsilon,\mathcal{O}_X)=\begin{cases}0 & (k\neq 0)\\ \mathcal{O}_{X,x_0} & (k=0)\end{cases}$$

が命題 2.1.1 の証明中の補題より得られる．また，命題 2.1.4 により $\varinjlim_{\tilde{U}\supset F} H^k(\tilde{U},\tau^{-1}\mathcal{O}_X)=H^k(F,\tau^{-1}\mathcal{O}_X|_F)$ であるが，$\tau(F)=x_0$ (＝一点)故 $\tau^{-1}\mathcal{O}_X|_F$ は F 上の定数層である．F は半球と同相故可縮，従って第1章の定理 1.2.4 により

$$H^k(F,\tau^{-1}\mathcal{O}_X|_F)=\begin{cases}0 & (k\neq 0)\\ \mathcal{O}_{X,x_0} & (k=0)\end{cases}$$

従って可換図式(2.1.4)において帰納的極限をとれば，Five-lemma により

$$\varinjlim_{\tilde{U}\supset F} H^k_{\tilde{U}\cap\sqrt{-1}SM}(\tilde{U},\tau^{-1}\mathcal{O}_X)=\varinjlim_{\xi,\varepsilon} H^k_{Z(\xi,\varepsilon)}(U_\varepsilon,\mathcal{O}_X)=\varinjlim_{\xi}\mathcal{H}^k_{Z_\xi}(\mathcal{O}_X)_x$$

が成り立つ．但しここで $Z_\xi\underset{\mathrm{def}}{=}\{x+\sqrt{-1}y\in X\,|\,\langle y,\xi_j\rangle\leqq 0\ (j=1,\cdots,n)\}$ と定める．この時 $Z_{(\xi,\varepsilon)}=Z_\xi\cap U_\varepsilon$ となっていることに注意しよう．このようにして，我々は $R^k\tau_*\pi^{-1}\mathcal{Q}_{(x_0,\sqrt{-1}\xi_0\infty)}$ を $\mathcal{O}$ 係数のコホモロジー群と関係付けることが出来た．従って超函数との関係付けも容易となる．実際，我々は次の結果を示すことができる．

命題 2.1.6.　(1)　任意の k に対して

$$(R^k\tau_*\pi^{-1}\mathcal{Q})_{(x_0,\sqrt{-1}\xi_0\infty)}=\varinjlim_{\xi}\mathcal{H}^{k+1}_{Z_\xi}(\mathcal{O}_X)_{x_0}$$

が成立する．

(2)　$\mathcal{B}_{M,x_0}\xrightarrow{\mathrm{sp}}\mathcal{C}_{M,(x_0,-\sqrt{-1}\xi_0\infty)}$ なる全射的写像 sp が規準的に定義できる．

注意.　次の節で $k\neq n$ ならば $\mathcal{H}^k_{Z_\xi}(\mathcal{O}_X)_{x_0}=0$ が成立することを示す．これと(1)とを併せれば命題 2.1.2′ の証明が完了する．

［証明］ 既に(1)は証明されているから(2)を示せば十分である．それには

$$(\mathcal{B}_M)_{x_0}=\mathcal{H}^n_M(\mathcal{O}_X)_{x_0}\longrightarrow\mathcal{H}^n_{Z_\xi}(\mathcal{O}_X)_{x_0}\longrightarrow\varinjlim_{\xi}\mathcal{H}^n_{Z_\xi}(\mathcal{O}_X)_{x_0}=(\mathcal{C}_M)_{(x_0,-\sqrt{-1}\xi_0\infty)}$$

なる写像が全射的であることを示せば十分である．

$$\mathcal{H}^n_M(\mathcal{O}_X)_{x_0}=\varinjlim_{\varepsilon}H^n_{M\cap U_\varepsilon}(U_\varepsilon,\mathcal{O}_X)$$

であり，又

$$\mathcal{H}^n_{Z_\xi}(\mathcal{O}_X)_{x_0}=\varinjlim_{\varepsilon}H^n_{Z_\xi\cap U_\varepsilon}(U_\varepsilon,\mathcal{O}_X)$$

であるから，先ず帰納的極限をとる以前の段階で Čech のコホモロジー群を考えて上の写像を調べてみよう．その為に，まず，$U_j=\{x+\sqrt{-1}\,y\in X\mid \langle y,\xi_j\rangle>0\}$ $(j=0,1,\cdots,n)$ と定める．次に $U_\varepsilon, U_\varepsilon-U_\varepsilon\cap M, U_\varepsilon-U_\varepsilon\cap Z_\xi$ の開被覆 $\mathcal{U},\mathcal{U}',\mathcal{U}''$ を

$\mathcal{U}=\{U_\varepsilon, U_\varepsilon\cap U_0, U_\varepsilon\cap U_1,\cdots,U_\varepsilon\cap U_n\}$, $\mathcal{U}'=\{U_\varepsilon\cap U_0, U_\varepsilon\cap U_1,\cdots,U_\varepsilon\cap U_n\}$, $\mathcal{U}''=\{U_\varepsilon\cap U_1,\cdots,U_\varepsilon\cap U_n\}$ と定める．第1章§2の議論と同様にして

$$C^{n+1}(\mathcal{U}\mathrm{mod}\,\mathcal{U}',\mathcal{O}_X)=C^{n+1}(\mathcal{U}\mathrm{mod}\,\mathcal{U}'',\mathcal{O}_X)=0$$
$$C^n(\mathcal{U}\mathrm{mod}\,\mathcal{U}',\mathcal{O}_X)=C^n(\mathcal{U}\mathrm{mod}\,\mathcal{U}'',\mathcal{O}_X)=\bigoplus_{j=0}^{n}\mathcal{O}_X(U_{\hat{j}})$$
$$C^{n-1}(\mathcal{U}\mathrm{mod}\,\mathcal{U}',\mathcal{O}_X)=\bigoplus_{j,k}{}'\mathcal{O}_X(U_{\hat{j}\hat{k}})$$

および

$$C^{n-1}(\mathcal{U}\mathrm{mod}\,\mathcal{U}'',\mathcal{O}_X)=\bigoplus_{j,k}{}'\mathcal{O}_X(\mathcal{U}_{\hat{j}\hat{k}})\oplus\bigoplus_{j=1}^{n}\mathcal{O}_X(U_{\hat{j}})$$

を得ることができる．但しここで $U_{\hat{j}}=\bigcap_{k\neq j}U_k$, $U_{\hat{j}\hat{k}}=\bigcap_{l\neq j,k}U_l$ とおいた．従って

$$H^n_{M\cap U_\varepsilon}(U_\varepsilon,\mathcal{O}_X)=\frac{\bigoplus_{j=0}^{n}\mathcal{O}_X(U_{\hat{j}})}{\bigoplus_{j,k}'\mathcal{O}_X(U_{\hat{j}\hat{k}})}\longrightarrow\frac{\bigoplus_{j=0}^{n}\mathcal{O}_X(U_{\hat{j}})}{\bigoplus_{j,k}'\mathcal{O}_X(U_{\hat{j}\hat{k}})\oplus\bigoplus_{j=1}^{n}\mathcal{O}_X(U_{\hat{j}})}=H^n_{Z_\xi\cap U_\varepsilon}(U_\varepsilon,\mathcal{O}_X)$$

なる規準的な写像は全射的である．よってこの帰納的極限をとって得られる $\mathcal{B}_{M,x_0}\longrightarrow\mathcal{C}_{M,(x_0,-\sqrt{-1}\xi_0\infty)}$ なる写像も全射的である．

定義 2.1.11. この全射的写像を**スペクトル写像**と呼び sp と記す．（なお，本章第3節定義 2.3.3 も参照)．

明らかに，$u\in\mathcal{B}_{M,x_0}$ に対して

$$\text{(2.1.5)}\quad \mathrm{sp}(u)_{(x_0,-\sqrt{-1}\xi_0\infty)}=0\Longleftrightarrow u=\sum_{j=1}^{n}b(\varphi_j),\ \varphi_j\in\mathcal{O}_X(U_{\hat{j}})$$

が成り立つ．

§2. 相対コホモロジー群の消滅定理——$\boldsymbol{R}^n$ の $\mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^n}$ に関する純 n 余次元性，その他

この節の目的は第1章で仮定した実解析的多様体 M の，その複素化 X 上の正則函数のなす層 $\mathcal{O}_X$ に関する純 n 余次元性，即ち $k\neq n$ ならば $\mathcal{H}^k_M(\mathcal{O}_X)=0$, と，前節の命題 2.1.6 の証明で用いられた，$k\neq n$ ならば $\mathcal{H}^k_{Z_\xi}(\mathcal{O}_X)_{x_0}=0$, の二つを証明することである．これによって前節で予告したように §1 の命題 2.1.2′ の証明が完了する．更に，関連して第1章で証明しないままにしてあった定理 1.2.4 の証明を完成させる．

命題 2.2.1. Y を複素多様体，Z をその閉集合とする．その時任意の複素多様体 V に対して $k<r$ なる限り $H^k_{V\times Z}(V\times Y,\mathcal{O}_{V\times Y})=0$ が成り立つならば，任意のコンパクト集合 $K(\subset \boldsymbol{C})$ に対して $H^k_{W\times K\times Z}(W\times \boldsymbol{C}\times Y,\mathcal{O}_{W\times \boldsymbol{C}\times Y})=0$ が任意の複素多様体 W と任意の $k<r+1$ に対して成り立つ．

［証明］ まず $k<r+1$ なる限り $H^k_{K\times Z}(\boldsymbol{C}\times Y,\mathcal{O}_{\boldsymbol{C}\times Y})=0$ となることを示そう．最後に注意するように，一般の場合は容易にこの場合に帰着できる．第1章 §1 定理 1.1.2 の (3) により

$$\cdots\to H^{k-1}_{\boldsymbol{C}\times Z}(\boldsymbol{C}\times Y,\mathcal{O}_{\boldsymbol{C}\times Y})\to H^{k-1}_{(\boldsymbol{C}-K)\times Z}(\boldsymbol{C}\times Y,\mathcal{O}_{\boldsymbol{C}\times Y})\to H^k_{K\times Z}(\boldsymbol{C}\times Y,\mathcal{O}_{\boldsymbol{C}\times Y})\to$$
$$\to H^k{}_{\boldsymbol{C}\times Z}(\boldsymbol{C}\times Y,\mathcal{O}_{\boldsymbol{C}\times Y})\to\cdots\quad(\text{完全})$$

が得られるから，$k<r$ ならば $H^k{}_{K\times Z}(\boldsymbol{C}\times Y,\mathcal{O}_{\boldsymbol{C}\times Y})=0$ である．(同定理の (1) により，$H^{k-1}_{(\boldsymbol{C}-K)\times Z}(\boldsymbol{C}\times Y,\mathcal{O}_{\boldsymbol{C}\times Y})=H^{k-1}_{(\boldsymbol{C}-K)\times Z}((\boldsymbol{C}-K)\times Y,\mathcal{O}_{(\boldsymbol{C}-K)\times Y})$ が成り立つことに注意せよ．)

よって問題は $k=r$ の時であって，この場合はいささか複雑である．まず $\boldsymbol{P}^1=\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$ を射影直線とする．次に $\mathcal{I}\underset{\text{def}}{=}\{\varphi\in\mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1\times Y};\varphi(\infty,y)=0\}$ を考えれば $\mathcal{I}|_{\boldsymbol{C}\times Y}=\mathcal{O}_{\boldsymbol{C}\times Y}$ であり，原点 $\{0\}$ に対して $\mathcal{I}|_{(\boldsymbol{P}^1-\{0\})\times Y}$ と $\mathcal{O}_{(\boldsymbol{P}^1-\{0\})\times Y}$ は $\varphi(x,y)\mapsto x\varphi(x,y)$ なる対応により同型である (逆対応は $\dfrac{1}{x}\psi(x,y)\leftarrow\!\shortmid\psi(x,y)$ である)．以下 $0\in K$ と仮定してこの同型により $\mathcal{I}|_{(\boldsymbol{P}^1-\{0\})\times Y}=\mathcal{O}_{(\boldsymbol{P}^1-\{0\})\times Y}$ と同一視する．従って $\{0\}\subset K\subset\boldsymbol{P}^1$ とすれば，$\mathcal{I}|_{(\boldsymbol{P}^1-K)\times Y}=\mathcal{O}_{(\boldsymbol{P}^1-K)\times Y}$ となるから仮定より $H^{r-1}_{(\boldsymbol{P}^1-K)\times Z}(\boldsymbol{P}^1\times Y,\mathcal{I})=H^{r-1}_{(\boldsymbol{P}^1-K)\times Z}((\boldsymbol{P}^1-K)\times Y,\mathcal{O}_{(\boldsymbol{P}^1-K)\times Y})=0$ を得る．一方，

$$H^r_{K\times Z}(\boldsymbol{C}\times Y,\mathcal{O}_{\boldsymbol{C}\times Y})=H^r_{K\times Z}(\boldsymbol{C}\times Y,\mathcal{I}|_{\boldsymbol{C}\times Y})=H^r_{K\times Z}(\boldsymbol{P}^1\times Y,\mathcal{I})$$

であり，更に

$$\cdots\to H^{r-1}_{(P^1-K)\times Z}(P^1\times Y,\mathcal{J})\longrightarrow H^r_{K\times Z}(P^1\times Y,\mathcal{J})\longrightarrow H^r_{P^1\times Z}(P^1\times Y,\mathcal{J})\to\cdots$$

（完全）

が成り立つから $H^r_{K\times Z}(C\times Y,\mathcal{O}_{C\times Y})\to H^r_{P^1\times Z}(P^1\times Y,\mathcal{J})$ は単射的である．よって $H^r_{P^1\times Z}(P^1\times Y,\mathcal{J})=0$ を示せば十分である．その為に次の二つの補題を準備しよう．

補題 1. $f:P^1\times Y\to Y$ を Y 成分への射影とすれば，任意の $k\geqq 0$ に対し $R^kf_*\mathcal{J}=0$ である．

［証明］ 各点 $y\in Y$ について $R^kf_*(\mathcal{J})_y=\varinjlim_{U\ni y}H^k(P^1\times U,\mathcal{J})=0$ を示せばよい．然るに y の基本近傍系として Stein 多様体から成るものが取れることは明らかだから，Y が Stein 多様体ならば任意の k に対して $H^k(P^1\times Y,\mathcal{J})=0$ となることを示せばよい．$U_0=(P^1-\{\infty\})\times Y$, $U_1=(P^1-\{0\})\times Y$ とおくと $P^1\times Y=U_0\cup U_1$ であり，U_0, U_1 は Stein 多様体であるから岡 - Cartan の定理（定理 1.2.2）により $\mathcal{J}$ に関して Leray 被覆である．よって Leray の定理（定理 1.2.1）によりこの被覆 $\mathcal{U}=\{U_0,U_1\}$ によってコホモロジー群 $H^k(P^1\times Y,\mathcal{J})$ を計算することが出来る．

明らかに $C^0(\mathcal{U},\mathcal{J})=\Gamma(U_0,\mathcal{J})\oplus\Gamma(U_1,\mathcal{J})$, $C^1(\mathcal{U},\mathcal{J})=\Gamma(U_0\cap U_1,\mathcal{J})$, $C^k(\mathcal{U},\mathcal{J})=0$ $(k\geqq 2)$ であるから，まず $H^k(P^1\times Y,\mathcal{J})=0$ $(k\geqq 2)$ が得られる．次に $H^0(P^1\times Y,\mathcal{J})=\Gamma(P^1\times Y,\mathcal{J})=0$ を示そう．$\varphi(x,y)\in\Gamma(P^1\times Y,\mathcal{J})$ は y を固定するとコンパクト多様体 P^1 上の正則函数となるから，最大値の原理により定数となり x によらない．

一方，任意の y に対して $\varphi(\infty,y)=0$ であるから $\varphi(x,y)=0$. 従って $H^0(P^1\times Y,\mathcal{J})=0$ である．最後に $H^1(P^1\times Y,\mathcal{J})=\dfrac{\Gamma(U_0\cap U_1,\mathcal{J})}{\delta(\Gamma(U_0,\mathcal{J})\oplus\Gamma(U_1,\mathcal{J}))}=0$ を示そう．$\varphi(x,y)\in\Gamma(U_0\cap U_1,\mathcal{J})$ とすれば $\varphi(x,y)$ は $\{(x,y),\ 0<|x|<\infty,\ y\in Y\}$ で正則であるから x について Laurent 展開を行えば，$\varphi(x,y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(y)x^n$ となる．ところが $\varphi_0(x,y)=\sum_{n\geqq 0}a_n(y)x^n$ は $U_0\times Y$ で正則であり，$\varphi_1(x,y)=\sum_{n<0}a_n(y)x^n$ は $U_1\times Y$ で正則である．しかも $\varphi(x,y)=\varphi_0(x,y)+\varphi_1(x,y)$ であるから，これは $\varphi(x,y)$ が $\delta(\Gamma(U_0,\mathcal{J})\oplus\Gamma(U_1,\mathcal{J}))$ の元であることを意味する．即ち $H^1(P^1\times Y,\mathcal{J})=0$ を得る．　（補題 1 の証終）

補題 2. X, Y を位相空間，$\mathscr{F}$ を X 上の層とする．連続写像 $f: X \to Y$ が $\mathscr{F}$ に関して純 r 次元的(即ち $k \neq r$ なる限り $R^k f_*(\mathscr{F})=0$) ならば，Y の任意の局所閉集合に対して

$$H^k_{f^{-1}(Z)}(X, \mathscr{F}) = H^{k-r}_Z(Y, R^r f_*(\mathscr{F}))$$

が成り立つ．

［証明］ $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{L}^0 \to \mathscr{L}^1 \to \cdots$ を $\mathscr{F}$ の脆弱分解とする．$R^k f_*(\mathscr{F})$ は Y 上の開集合 U に対して $H^k(f^{-1}(U), \mathscr{F}) = H^k(\Gamma(f^{-1}(U), \mathscr{L}^\cdot) = H^k(\Gamma(U, f_*\mathscr{L}^\cdot))$ を対応させる前層を層化したものであったから，これは

$$\mathscr{H}^k(f_*\mathscr{L}^*) = \frac{\operatorname{Ker}(f_*\mathscr{L}^k \to f_*\mathscr{L}^{k+1})}{\operatorname{Im}(f_*\mathscr{L}^{k-1} \to f_*\mathscr{L}^k)}$$

に等しい．従って

$$f_*\mathscr{L}^{r-1} \xrightarrow{\varphi} f_*\mathscr{L}^r \xrightarrow{\psi} f_*\mathscr{L}^{r+1}$$

とする時 $\mathscr{I} = \operatorname{Im}\varphi, \mathscr{Z} = \operatorname{Ker}\psi$ とすれば

$$0 \longrightarrow f_*\mathscr{L}^0 \longrightarrow f_*\mathscr{L}^1 \to \cdots \to f_*\mathscr{L}^{r-1} \longrightarrow \mathscr{I} \longrightarrow 0$$

は脆弱層の作る完全系列となるから，$\Gamma_Z(Y, f_*\mathscr{L}^k) = \Gamma_{f^{-1}(Z)}(X, \mathscr{L}^k)$ に注意すれば

$$0 \longrightarrow \Gamma_{f^{-1}(Z)}(X, \mathscr{L}^0) \to \cdots \to \Gamma_{f^{-1}(Z)}(X, \mathscr{L}^{r-1}) \longrightarrow \Gamma_Z(Y, \mathscr{I}) \longrightarrow 0$$

も完全系列となる．従って $k \leqq r-1$ ならば $H^k_{f^{-1}(Z)}(X, \mathscr{F}) = 0$ が成立する．$k \geqq r$ の場合には $0 \to \mathscr{I} \to \mathscr{Z} \to R^r f_*(\mathscr{F}) \to 0$ が完全系列であり，又

$$0 \to \mathscr{Z} \to f_*\mathscr{L}^r \to f_*\mathscr{L}^{r+1} \to \cdots$$

が $\mathscr{Z}$ の脆弱分解を与えることから第1章命題 1.1.5，および命題 1.1.6 の証明と全く同様にして証明できる．（証終）

さて補題1と補題2とを併せれば任意の k に対して

$$H^k_{P^1 \times Z}(P^1 \times Y, \mathscr{I}) = H^{k-r}_Z(Y, R^r f_*(\mathscr{I})) = H^{k-r}_Z(Y, 0) = 0$$

が成立する．従って先に注意した所から $H^r_{K \times Z}(\boldsymbol{C} \times Y, \mathscr{O}_{\boldsymbol{C} \times Y}) = 0$ が証明される．

以上により任意の $k < r+1$ に対して

$$H^k_{K \times Z}(\boldsymbol{C} \times Y, \mathscr{O}_{\boldsymbol{C} \times Y}) = 0$$

が示されたから，改めて Y として $Y \times W$，Z として $W \times Z$ を取り直すことにより結局命題 2.2.1 を得る．（証終）

系． Ω を $\boldsymbol{C}$ の連結開集合，$Z(\subsetneqq \Omega)$ を Ω の閉集合，$K_j \subset \boldsymbol{C}(j=1, \cdots, n)$ をコン

パクト集合とすれば，$k \neq n+1$ なる限り，$H^k_{Z\times K_1\times\cdots\times K_n}(\Omega\times \boldsymbol{C}^n, \mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^{n+1}})=0$ が成立する．

［証明］ 連結開集合 Ω の上の正則函数 φ が開集合 $(\Omega-Z)$ $(\neq\phi)$ 上で 0 ならば，一致の定理により Ω 上で 0．従って V を任意の複素多様体として $V\times\Omega$ 上で正則な函数 $\varphi(x, y)(x\in V, y\in\Omega)$ が $V\times(\Omega-Z)$ 上で 0 ならば各 $x\in V$ に対して $\varphi(x, y)=0$ となる．従って φ は $V\times\Omega$ 上で 0．即ち $H^0_{V\times Z}(V\times\Omega, \mathcal{O}_{V\times\Omega})=\Gamma_{V\times Z}(V\times\Omega, \mathcal{O}_{V\times\Omega})=0$ が従う．従って命題 2.2.1 より $H^k_{W\times K_1\times Z}(W\times \boldsymbol{C}\times Y, \mathcal{O}_{W\times \boldsymbol{C}\times Y})=0$ $(k<2)$ が言える．$\boldsymbol{C}\times Y, K_1\times Z$ を改めて Y, Z とおけば再び命題 2.2.1 が使える．以下帰納的に $k<n+1$ なる限り $H^k_{Z\times K_1\times\cdots\times K_n}(\Omega\times \boldsymbol{C}^n, \mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^{n+1}})=0$ を得る．$k>n+1$ の場合は flabby dim $\mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^{n+1}}\leqq n+1$ と云う Malgrange の定理(定理 1.1.4)より明らか．　(証終)

定義 2.2.1. $\boldsymbol{C}^n$ の部分集合 K が**解析的多面体** (analytic polyhedron) であるとは，$f_1, \cdots, f_N\in\mathcal{O}(\boldsymbol{C}^n)$ が存在して $K=\{z\in\boldsymbol{C}^n \mid |f_1(z)|\leqq 1, \cdots, |f_N(z)|\leqq 1\}$ と表わせることを言う．

命題 2.2.2. K_1, K_2 が $\boldsymbol{C}^n$ のコンパクトな解析的多面体であれば，$k\neq n$ である限り $H^k_{K_1-K_2}(\boldsymbol{C}^n, \mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^n})=0$ が成立する．

［証明］ $K_1\supset K_2$ と仮定しても一般性を失わないから，$K_1=\{z\in\boldsymbol{C}^n \mid |f_j(z)| \leqq 1\ (j=1, \cdots, N)\}$ および $K_2=\{z\in\boldsymbol{C}^n \mid |f_j(z)|\leqq 1\ (j=1, \cdots, N, \cdots, N+N')\}$ としてよい．ここで

$$K'_j=\{z\in\boldsymbol{C}^n \mid |f_l(z)|\leqq 1\ \ (l=1, \cdots, N+j)\}\ \ (1\leqq j\leqq N')$$

と定めると，

$$\cdots\to H^k_{K'_j-K'_{j+1}}(\boldsymbol{C}^n, \mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^n})\to H^k_{K_1-K'_{j+1}}(\boldsymbol{C}^n, \mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^n})\to H^k_{K_1-K'_j}(\boldsymbol{C}^n, \mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^n})\to\cdots$$

なる完全系列が存在する (第 1 章定理 1.1.2 の(3))から $N'=1$ の時証明しておけば，一般の場合はこの完全系列を使って帰納的に証明できる ($K_2=K'_{N'}$ であることに注意)．そこで，$K_1=\{z\in\boldsymbol{C}^n \mid |f_j(z)|\leqq 1\ (j=1, \cdots, N-1)\}$，$K_2=\{z\in\boldsymbol{C}^n \mid |f_j(z)|\leqq 1\ (j=1, \cdots, N)\}$ とする．ここで K_1, K_2 はコンパクトだから，$f_j(z)=z_j$ $(1\leqq j\leqq n\leqq N-1)$ としてよい．

さて $X=\boldsymbol{C}^n$ から $Y=\boldsymbol{C}^N$ への写像 F を $x=(x_1, \cdots, x_n)\in X$ に対して $F(x)=(x_1, \cdots, x_n, f_{n+1}(x), \cdots f_N(x))$ として定義しよう．次に $\max_{z\in K_1}(|f_N(z)|, 1)<a$ なる a を適当にとって

$$\tilde{K}_1=\{y\in Y \mid |y_j|\leqq 1\ (j=1,\cdots,N-1)\ \text{かつ}\ |y_N|\leqq a\},$$

$$\tilde{K}_2=\{y\in Y \mid |y_j|\leqq 1\ (j=1,\cdots,N)\}$$

と定めれば $\tilde{K}_1, \tilde{K}_2$ は Y に含まれるコンパクト集合で $F^{-1}(\tilde{K}_1)=K_1$, $F^{-1}(\tilde{K}_2)=K_2$ が成り立つ．

さて一般に，X, Y を位相空間，$F: X\to Y$ を単射的かつ連続な閉写像とする．S を Y の局所閉集合，$\mathscr{F}$ を X 上の層とすれば任意の k に対して

$$H^k_{F^{-1}(S)}(X,\mathscr{F})=H^k_S(Y,F_*\mathscr{F})$$

が成り立つ．実際，各点 $y\in Y$ に対して $R^kF_*(\mathscr{F})_y=\varinjlim_{U\ni y} H^k(F^{-1}(U),\mathscr{F})$ であり，f が閉写像故，これは $\varinjlim_{V\supset F^{-1}(y)} H^k(V,\mathscr{F})$ に等しい．然るに F は単射的故，$F^{-1}(y)$ は X の一点か，或いは空集合である．いずれにしても $k\neq 0$ なら 0 である．（命題 2.1.1 の証明の中の補題参照）．従って F は $\mathscr{F}$ に対して純 0 次元的である．故に上の同型は命題 2.2.1 の証明中用いた補題 2 より明らかである．従って，我々の場合，上の同型は $H^k_{K_1-K_2}(\boldsymbol{C}^n,\mathscr{O}_{\boldsymbol{C}^n})=H^k{}_{\tilde{K}_1-\tilde{K}_2}(Y,F_*\mathscr{O}_X)$ を意味するから求める結果を得るには，$k\neq n$ なる限り $H^k{}_{\tilde{K}_1-\tilde{K}_2}(Y,F_*\mathscr{O}_X)=0$, を示せば十分である．その為に次の補題を先ず準備しよう．

補題 1. $\mathscr{O}_Y{}^l$ により $Y=\boldsymbol{C}^N$ 上の正則函数の層 $\mathscr{O}_Y$ の l 個の直和を記すことにする．この時

$$0\longleftarrow F_*\mathscr{O}_X\longleftarrow \mathscr{O}_Y\longleftarrow \mathscr{O}_Y{}^{N-n}\longleftarrow\cdots\longleftarrow \mathscr{O}_Y^{\binom{N-n}{2}}\longleftarrow\cdots\longleftarrow\mathscr{O}_Y^{\binom{N-n}{N-n}}\longleftarrow 0$$

なる完全系列が存在する．

［証明］ Y の座標系 $(y_1,\cdots,y_N)$ を $w_j=y_j$ $(1\leqq j\leqq n)$, および $w_j=y_j-f_j(y_1,\cdots,y_n)$ $(n+1\leqq j\leqq N)$ として新しい座標系 $(w_1,\cdots,w_N)$ に取り換えると，$F(X)=\{(w_1,\cdots,w_N)\in\boldsymbol{C}^N \mid w_{n+1}=\cdots=w_N=0\}$ となる．

$y\notin F(X)$ ならば $(F_*\mathscr{O}_X)_y=0$, また，$y\in F(X)$ ならば $(F_*\mathscr{O}_X)_y=(\mathscr{O}_{F(X)})_y$ と考えられるから，$\varphi(w_1,\cdots,w_N)\in\mathscr{O}_Y$ に対して $\varphi|_{w_{n+1}=\cdots=w_N=0}\in F_*\mathscr{O}_X$ を対応させれば $0\leftarrow F_*\mathscr{O}_X\leftarrow\mathscr{O}_Y$ なる完全系列を得ることができる．次に $\{\varphi_j\}_{n+1\leqq j\leqq N}\mapsto\sum_{j=n+1}^{N}\varphi_jw_j$ により $\mathscr{O}_Y{}^{N-n}$ から $\mathscr{O}_Y$ への写像を定義すれば $F_*\mathscr{O}_X\leftarrow\mathscr{O}_Y\leftarrow\mathscr{O}_Y{}^{N-n}$ が

完全系列になることは容易に確かめ得る．一般には，先ず $\mathcal{O}_Y^{\binom{N-n}{k}}$ の元は $\{\varphi_{i_1,\dots,i_k}\}_{n+1\leq i_1,\cdots,i_k\leq N}$ (但し $\varphi_{i_1,\dots,i_k}$ は添数 $(i_1,\cdots,i_k)$ に関して交代的，即ち，k 次対称群 $\mathfrak{S}_k$ の元 σ に対して $\varphi_{i_{\sigma(1)},\dots,i_{\sigma(k)}}=(\mathrm{sgn}\sigma)\varphi_{i_1,\dots,i_k}$ を満たす)と表現出来ることに注意しよう．さて

$$\mathcal{O}_Y^{\binom{N-n}{k}}\xrightarrow{\ \delta\ }\mathcal{O}_Y^{\binom{N-n}{k-1}}$$

なる写像 δ を次のように定義する．まず $(\delta\varphi)_{i_1,\cdots,i_{k-1}}\underset{\mathrm{def}}{=}\sum_{j=n+1}^{N}\varphi_{i_1,\dots,i_{k-1},j}w_j$ と定め，次に $\delta(\{\varphi_{i_1,\dots,i_k}\})=\{(\delta\varphi)_{i_1,\dots,i_{k-1}}\}$ として定義する．この時，$\varphi_{i_1,\dots,i_{k-2},j,l}+\varphi_{i_1,\dots,i_{k-2},l,j}=0$ だから

$$(\delta^2\varphi)_{i_1,\dots,i_{k-2}}=\sum_{j=n+1}^{N}(\delta\varphi)_{i_1,\dots,i_{k-2},j}w_j=\sum_{j,l}\varphi_{i_1,\dots,i_{k-2},j,l}w_jw_l=0$$

が成立する．即ち $\delta^2=0$ となる．

逆に，$\delta\varphi=0$ としよう．即ち $\sum_{j=n+1}^{N}\varphi_{i_1,\dots i_{k-1},j}w_j=0$ とする． この時 $\delta h=\varphi$ となる h が存在することを示そう．以下 $y\in F(X)$の場合を考えよう．なお，$y\notin F(X)$ の場合は直接計算によって確かめ得る．

N に関する帰納法で証明しよう．$N=n+1$ の時は $k=1$ であるから，$\varphi_{n+1}w_{n+1}=0$，従って開集合 $\{w|w_{n+1}\neq 0\}$ のところで $\varphi_{n+1}=0$ となる．従って一致の定理により $\varphi_{n+1}=0$，即ち$\mathcal{O}_Y\xleftarrow{\ \delta\ }\mathcal{O}_Y\longleftarrow 0$ が完全であることが示された．$N-1$ の時成り立つとして，N の時も成り立つことを示そう．$\sum_{j=n+1}^{N}\varphi_{i_1,\cdots,i_{k-1},j}w_j=0$ が成立するから特に $\sum_{j=n+1}^{N-1}(\varphi_{i_1,\cdots i_{k-1}j}w_j|_{\{w_n=0\}})=0$ である．帰納法の仮定により $\varphi_{i_1,\cdots,i_{k-1},i_k}=\sum_{j=n+1}^{N-1}\psi_{i_1,\cdots,i_k,j}w_j+w_Ng_{i_1,\cdots,i_k}$ (但し $i_1,\cdots,i_k<N$) となる $\psi_{i_1,\cdots,i_k,j}$, $g_{i_1,\cdots,i_k}$ が存在する．従って $0=\sum_{j=n+1}^{N}\varphi_{i_1,\cdots,i_{k-1},j}w_j=\varphi_{i_1,\cdots i_{k-1},N}w_N+w_N\sum_{l=n+1}^{N-1}g_{i_1,\cdots,i_{k-1},l}w_l$ が成り立ち，$\varphi_{i_1,\cdots_{k-1},N}=-\sum_{j=n+1}^{N-1}g_{i_1,\cdots,i_{k-1},j}w_j$ を得る．そこで $h_{i_1,\cdots,i_{k+1}}$ $(i_{j_1}<\cdots<i_{k+1})$ を，$i_{k+1}<N$ の時 $\psi_{i_1,\cdots,i_{k+1}}$，$i_{k+1}=N$ の時 $g_{i_1,\cdots,i_{k-1},i_k}$ として定義すれば，$i_1<\cdots<i_k<N$の時 $(\delta h)_{i_1,\cdots,i_k}=\sum_{j=n+1}^{N}h_{i_1,\cdots,i_k,j}w_j=\sum_{j=n+1}^{N-1}\psi_{i_1,\cdots i_k,j}w_j+w_Ng_{i_1,\cdots,i_k}=\varphi_{i_1,\cdots,i_k}$ であり，$i_k=N$ の時も $(\delta h)_{i_1,\cdots i_{k-1},N}=\sum_{j=n+1}^{N-1}h_{i_1,\cdots,i_k,j}w_j=-\sum_{j=n+1}^{N-1}h_{i_1,\cdots,i_{k-1},j,N}w_j=-\sum_{j=n+1}^{N-1}g_{i_1,\cdots i_{k-1},j}w_j=\varphi_{i_1,\cdots,i_{k-1},N}$，即ち $\delta h=\varphi$ となる．従って

$$\mathcal{O}_Y^{\binom{N-n}{k-1}}\xleftarrow{\ \delta\ }\mathcal{O}_Y^{\binom{N-n}{k}}\xleftarrow{\ \delta\ }\mathcal{O}_Y^{\binom{N-n}{k+1}}$$

が完全であることが証明された. (補題1の証明終)

補題 2. $Y=\boldsymbol{C}^N$ 上の層 $\mathscr{F}$ に対して

$$0\longleftarrow\mathscr{F}\longleftarrow\mathcal{O}_Y{}^{l_0}\longleftarrow\mathcal{O}_Y{}^{l_1}\longleftarrow\cdots\longleftarrow\mathcal{O}_Y{}^{l_r}\longleftarrow 0$$

と云う完全系列が存在すれば, $k<N-r$ なる限り

$$H^k{}_{\tilde{K}_1-\tilde{K}_2}(Y,\mathscr{F})=0$$

が成立する.

［証明］ まず $k\neq N$ ならば, $H^k{}_{\tilde{K}_1-\tilde{K}_2}(Y,\mathcal{O}_Y)=0$ が成り立つことを示そう.

命題 2.2.1 の系において, $\Omega=\{y_N\in\boldsymbol{C}\,|\,|y_N|>1\}$, $Z=\{y_N\in\boldsymbol{C}\,|\,1<|y_N|\leqq a\}$, $K_j=\{y_j\in\boldsymbol{C}\,|\,|y_j|\leqq 1\}$ とすれば, $\tilde{K}_1-\tilde{K}_2=Z\times K_1\times\cdots\times K_{N-1}$ であるから, $k\neq N$ である限り

$$H^k{}_{\tilde{K}_1-\tilde{K}_2}(Y,\mathcal{O}_Y)=H^k_{Z\times K_1\times\cdots\times K_{N-1}}(\Omega\times\boldsymbol{C}^{N-1},\mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^N})=0$$

を得る. 従って $k\neq N$ の時 $H^k{}_{\tilde{K}_1-\tilde{K}_2}(Y,\mathcal{O}_Y^{l_0})=0$ は定義より明らかである. 従って $r=0$ の時補題2に言う事実が成立する. そこで r に関する帰納法で一般の場合を証明しよう. 補題の条件の完全系列を

$$0\longleftarrow\mathscr{F}\longleftarrow\mathcal{O}_Y{}^{l_0}\longleftarrow\mathscr{G}\longleftarrow 0,\quad 0\longleftarrow\mathscr{G}\longleftarrow\mathcal{O}_Y{}^{l_1}\longleftarrow\cdots\longleftarrow\mathcal{O}_Y{}^{l_r}\longleftarrow 0$$

と二つに分解すれば仮定により $k<N-(r-1)=N-r+1$ である限り

$$H^k{}_{\tilde{K}_1-\tilde{K}_2}\ (Y,\mathscr{G})=0$$

が成立するから, $k<N-r$ の時,

$$H^k{}_{\tilde{K}_1-\tilde{K}_2}(Y,\mathcal{O}_Y{}^{l_0})\longrightarrow H^k{}_{\tilde{K}_1-\tilde{K}_2}(Y,\mathscr{F})\longrightarrow H^{k+1}{}_{\tilde{K}_1-\tilde{K}_2}(Y,\mathscr{G})$$

なる完全系列より求める

$$H^k{}_{\tilde{K}_1-\tilde{K}_2}(Y,\mathscr{F})=0$$

を得る. (補題2の証終)

以上二つの補題により $k<n$ ならば

$$H^k_{K_1-K_2}(\boldsymbol{C}^n,\mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^n})=H^k{}_{\tilde{K}_1-\tilde{K}_2}(Y,F_*\mathcal{O}_X)=0$$

が証明された. 他方, Malgrange の定理(定理 1.1.4)により flabby dim $\mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^n}\leqq n$ であるから, $k>n$ ならば

$$H^k_{K_1-K_2}(\boldsymbol{C}^n,\mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^n})=0$$

を得る. 従って $k\neq n$ ならば

$$H^k_{K_1-K_2}(\boldsymbol{C}^n,\mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^n})=0$$

が成り立つ. (証終)

注意.　命題 2.2.2 において K_2 として空集合をとることもできることに注意しておこう．例えば，$f_{n+1}(z)=2$ という定数函数を考えればよい．即ち，K_1 が命題 2.2.2 の条件を満たす時，$k\neq n$ なる限り

$$H^k_{K_1}(\boldsymbol{C}^n, \mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^n})=0$$

が成立する．

命題 2.2.2 を用いて目的の定理(定理 2.2.1 および定理 2.2.2)を証明しよう．

定理 2.2.1.　M を実解析的多様体，X をその複素化としよう．この時，M は $\mathcal{O}_X$ に関して純 n 余次元的である．

［証明］　問題は局所的であるから，$M=\boldsymbol{R}^n, X=\boldsymbol{C}^n$ であると仮定して一般性を失うことはない．従って原点 0 において

$$\mathcal{H}^k_{\boldsymbol{R}^n}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^n})_0=0 \quad (k\neq n)$$

が成り立つことを示せば十分である．一般に $f\in\mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^n}$ に対して $\mathrm{Im}f\leqq 0$ と $|e^{\sqrt{-1}f(z)}|\leqq 1$ とは同値であるから，$\boldsymbol{R}=\{z\in\boldsymbol{C}\,|\,|e^{\sqrt{-1}z}|\leqq 1, |e^{-\sqrt{-1}z}|\leqq 1\}$ が成立する．従って任意の多項式 $\varphi(z)$ に対して $K_1=\boldsymbol{R}^n\cap\{z\in\boldsymbol{C}^n\,|\,|z_1|\leqq 1,\cdots, |z_n|\leqq 1\}$ および $K_2=K_1\cap\{z\in\boldsymbol{C}^n\,|\,\mathrm{Im}\varphi(z)\leqq 0\}$ はいずれもコンパクトな解析的多面体となる．従って命題 2.2.2 を適用して $k\neq n$ ならば

$$H^k_{K_1-K_2}(\boldsymbol{C}^n, \mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^n})=0$$

を得ることができる．ここで φ として $\varphi(z)=z_1+\sqrt{-1}-2\sqrt{-1}(z_1{}^2+\cdots+z_n{}^2)$ をとれば $K_1-K_2=\boldsymbol{R}^n\cap\{z\in\boldsymbol{C}^n;\ \mathrm{Im}\varphi>0\}$ が成り立つ．何故なら $z\in\boldsymbol{R}^n$ に対して $\mathrm{Im}\varphi(z)=1-2(z_1{}^2+\cdots+z_n{}^2)>0$ ならば特に $|z_j|<1/\sqrt{2}\,(j=1,\cdots,n)$ となり，従って $z\in K_1$ となるからである．そこで $\Omega=\{z\in\boldsymbol{C}^n\,|\,|z_1|<1,\cdots, |z_n|<1,\ \mathrm{Im}\varphi>0\}$ とおけば $K_1-K_2=\Omega\cap\boldsymbol{R}^n$ であり，従って $k\neq n$ ならば

$$H^k_{\boldsymbol{R}^n\cap\Omega}(\Omega, \mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^n})=H^k_{K_1-K_2}(\boldsymbol{C}^n, \mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^n})=0$$

を得る．他方，定義により

$$\mathcal{H}^k{}_{\boldsymbol{R}^n}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^n})_0=\varinjlim_{0\in U} H^k_{\boldsymbol{R}^n\cap U}(U, \mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^n})$$

であるが $U=a\Omega$ $(a>0)$ とおくと $k\neq n$ ならば

$$H^k_{U\cap\boldsymbol{R}^n}(U, \mathcal{O})=0$$

が成り立ち，しかも $a\Omega(a>0)$ は原点の基本近傍系をなすから $a\to 0$ とすることにより $k\neq n$ なる限り

$$\mathcal{H}^k_{\boldsymbol{R}^n}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^n})_0=0$$

が成立することを知る.　(証終)

定理 2.2.2.　$Z=\{z\in \boldsymbol{C}^n \mid \mathrm{Im} z_i \geqq 0 \ (1\leqq i\leqq n)\}$ に対して $k\neq n$ なる限り

$$\mathcal{H}_Z^k(\mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^n})_0=0$$

が成立する.

［証明］　原点 0 の十分小さい近傍 $\Omega(\subset \boldsymbol{C}^n)$ に対して $k\neq n$ ならば

$$H_{Z\cap\Omega}^k(\Omega, \mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^n})=0$$

が成り立つことを示せばよい. さて $\varphi(z)=-(z_1+\cdots+z_n)+\sqrt{-1}a-b\sqrt{-1}(z_1{}^2+\cdots+z_n{}^2)$ に対して $K_1=Z\cap\{z\in \boldsymbol{C}^n \mid |z_j|\leqq 1 \ (1\leqq j\leqq n)\}$, $K_2=K_1\cap\{z\in \boldsymbol{C}^n \mid \mathrm{Im}\varphi(z)\leqq 0\}$ とおけば, これらはコンパクトな解析的多面体であるから, 命題 2.2.2 により $k\neq n$ ならば

$$H_{K_1-K_2}^k(\boldsymbol{C}^n, \mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^n})=0$$

が成り立つ.

今 $\Omega=\{z\in \boldsymbol{C}^n \mid \mathrm{Im} f(z)>0, |z_j|<2\sqrt{a} \,(1\leqq j\leqq n)\}$ とおけば十分小さい a に対し $K_1-K_2\supset\Omega\cap Z$ となることは明らかである. 更に a, b を適当にとれば $K_1-K_2=\Omega\cap Z$ となることを示そう. それには K_1-K_2 上で $|z_j|<2\sqrt{a}$ $(1\leqq j\leqq n)$ が成り立つことを言えばよい. $z_j=x_j+\sqrt{-1}y_j$ $(1\leqq j\leqq n)$ とおく時,

$$\mathrm{Im}\varphi(z)=-b(x_1{}^2+\cdots+x_n{}^2)+a-\{y_1(1-by_1)+\cdots+y_n(1-by_n)\}$$

となるから, ここで $b=\dfrac{1}{2}$ とおくと

$$0<\mathrm{Im}\,\varphi(z)\leqq a-\frac{1}{2}(x_1{}^2+\cdots+x_n{}^2)-\frac{1}{2}(y_1+\cdots+y_n)$$

となり, 従って

$$\frac{1}{2}(x_1{}^2+\cdots+x_n{}^2)+\frac{1}{2}(y_1+\cdots+y_n)\leqq a$$

を得る. 仮定より $\mathrm{Im} z_j=y_j\geqq 0 \,(1\leqq j\leqq n)$ であるから $x_j{}^2\leqq 2a$, $0\leqq y_j\leqq 2a$ $(1\leqq j\leqq n)$ を得る. 従って a を十分小さい正数にとれば $|z_j|<2\sqrt{a}\,(1\leqq j\leqq n)$ となる. さてここで $a\to 0$ とすれば, それに対応する Ω の全体は原点の基本近傍系をなすことを思い出そう. 今, $k\neq n$ ならば, 上に証明したことから

$$H_{\Omega\cap U}^k(\Omega, \mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^n})=H_{K_1-K_2}^k(\boldsymbol{C}^n, \mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^n})=0$$

が成り立つから, $a\to 0$ として, それに対応する Ω に関して帰納的極限をとることにより, 結局

$$\mathcal{H}_Z^k(\mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^n})_0=0 \quad (k\neq n)$$

を得る.　(証終)

命題 2.2.3. K_1, K_2 は命題 2.2.2 と同じ条件を満たすと仮定する．この時，任意の複素多様体 W に対して

$$H^k_{(K_1-K_2)\times W}(\boldsymbol{C}^n\times W, \mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^n\times W})=0 \quad (k<n)$$

が成立する．

証明は命題 2.2.2 と全く同様である．$H^k_{K'_j-K'_{j+1}}(\boldsymbol{C}^n, \mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^n})$ のかわりに $H^k_{(K'_j-K'_{j+1})\times W}(\boldsymbol{C}^n\times W, \mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^n\times W})$，$X=\boldsymbol{C}^n$ のかわりに $\boldsymbol{C}^n\times W$，$Y=\boldsymbol{C}^N$ のかわりに $\boldsymbol{C}^N\times W$ 等と置き換えてやればよい．各自試みられたい．

さて最後にこの節の議論の副産物として第1章の定理 1.2.4，即ち定数層係数のコホモロジー群のホモトピー不変性，の証明を与えよう．

X, Y を位相空間，M を加群とする．$f_\nu: X\to Y$ $(\nu=0,1)$ を連続写像とすれば命題 2.1.3 により $f_\nu{}^*: H^k(Y, M_Y)\to H^k(X, f_\nu{}^{-1}M_Y)=H^k(X, M_X)$ $(\nu=0,1)$ を得る．先ず f_0 と f_1 がホモトピックならば $f_0{}^*=f_1{}^*$ となることを示そう．$I=[0,1]$ とする時 $F: X\times I\to Y$ なる連続写像で $F(x,\nu)=f_\nu(x)$ $(\nu=0, 1)$ となるものが存在する．写像 $\iota_\nu: X\to X\times I$ を $\iota_\nu(x)=(x,\nu)$ $(\nu=0, 1)$ により定義すれば $f_\nu=F\circ\iota_\nu$，従って

$$H^k(Y, M_Y)\xrightarrow{F^*}H^k(X\times I, M_{X\times I})\underset{\iota_1{}^*}{\overset{\iota_0{}^*}{\rightrightarrows}}H^k(X, M_X)$$

において $f_\nu{}^*=\iota_\nu{}^*\circ F^*$ であるから，$f_0{}^*=f_1{}^*$ を示すには $\iota_0{}^*=\iota_1{}^*$ を言えば十分である．

さて $p: X\times I\to X$ を X への射影としよう．この時 $p\circ\iota_\nu(\nu=0, 1)$ は X 上の恒等写像であるから，$\iota_\nu{}^*\circ p^*=\mathrm{id}$. 従って p^* が同型であることを示せば $\iota_0{}^*=\iota_1{}^*$ が従う．p^* が同型写像であること示す為には

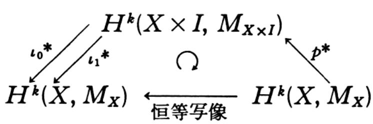


図 2.2.1.

$$R^kp_*(M_{X\times I})=\begin{cases}M_X & (k=0)\\ 0 & (k\neq 0)\end{cases}$$

を言えば十分である．実際，その時，命題 2.2.1 の証明中の補題 2 により任意の k に対して

$$H^k(X\times I, M_{X\times I})\cong H^{k-0}(X, R^0p_*(M_{X\times I}))=H^k(X, M_X)$$

が成立し，従って p^* は同型となる．

$R^k p_*(M_{X\times I})$ を計算しよう．p が固有写像であることから，命題 2.1.4 の系が適用出来て

$$R^k p_*(M_{X\times I})_x = H^k(I, M) \quad (x \in X)$$

が任意の k に対して成立することが判る．従って次の補題を証明すればよい．

補題．
$$H^k(I, M) = \begin{cases} M & (k=0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$

［証明］ I は連結であるから $H^0(I, M) = M$ となる．次に，$k \geqq 1$ の時，$0 \neq s \in H^k(I, M)$ と仮定して矛盾することを示そう．

集合 $\mathscr{M} = \{[a, b] \subset I \mid s|_{[a,b]} \neq 0\}$ に順序関係を $[a, b] > [a', b']$ を $[a, b] \subset [a', b']$ が成り立つ時，かつその時に限り $[a, b] > [a', b']$ と定めることによって定義しよう．この順序に関して $\mathscr{M}$ は帰納的順序集合になる．実際 $\{F_j = [a_j, b_j]\}$ を $\mathscr{M}$ の線型順序部分集合とすれば $F = \cap F_j$ は I の閉区間であり $H^k(F, M) = \varinjlim_j H^k(F_j, M)$ であるから $s|_F \neq 0$ である．従って Zorn の補題により極大元(即ち，今の場合，極小区間) $[a, b]$ が存在する．然るにここでもし $a=b$ なら $s|_{[a,b]} = 0$ となるから $a<b$ でなければならない．そこで $a<c<b$ なる c を一つ選ぶことができる．この時，

$$0 \longrightarrow \Gamma([a, b], \mathscr{L}) \xrightarrow{i} \Gamma([a, c], \mathscr{L}) \oplus \Gamma([c, b], \mathscr{L})$$

および

$$\Gamma([a, c], \mathscr{L}) \oplus \Gamma([c, b], \mathscr{L}) \xrightarrow{j} \Gamma(\{c\}, \mathscr{L}) \longrightarrow 0$$

という写像 i, j を，

$$i(s) = (s|_{[a,c]}, s|_{[c,b]})$$

および

$$j(s_1, s_2) = (s_1|_c - s_2|_c)$$

として定めれば，$\mathscr{L}$ が定数層である時，或いは脆弱層である時には，上の二つの図式は完全系列となる．従って

$$\cdots \to H^{k-1}(\{c\}, M) \to H^k([a, b], M) \to H^k([a, c], M) \oplus H^k([c, b], M) \to$$
$$\to H^k(\{c\}, M) \to \cdots$$

なる完全系列を得ることができる．ここで $k>1$ ならば $H^{k-1}(\{c\}, M) = H^k(\{c\}, M) = 0$ であるから

$$\begin{array}{ccc} H^k([a,b],M) \cong & H^k([a,c],M) \oplus H^k([c,b],M) \\ \Downarrow \ \ & \Downarrow \\ s|_{[a,b]} \longmapsto & s|_{[a,c]} \oplus s|_{[c,b]} \end{array}$$

なる同型が $k>1$ に対して得られることになる． 然るに $[a,b]$ の極大性により

$$s|_{[a,b]} \neq 0 \text{ かつ } s|_{[a,c]} = s|_{[c,b]} = 0$$

が成り立つから，これは矛盾である．$k=1$ の時

$$0 \to H^0([a,b],M) \to H^0([a,c],M) \oplus H^0([c,b],M) \to H^0(\{c\},M) \to 0$$

なる完全系列より，同じく $H^1([a,b],M)=0$ を得る．　(証終)

さて X と Y が同じホモトピー型をもつとしよう．即ち，連続写像 $f\colon X \to Y$ および連続写像 $g\colon Y \to X$ が存在して $g \circ f \simeq 1_X$, $f \circ g \simeq 1_Y$ が満たされるとしよう．そうすれば今証明したことにより，$f^* \circ g^* = 1$, $g^* \circ f^* = 1$ となり

$$H^k(X,M) \underset{f^*}{\overset{g^*}{\rightleftarrows}} H^k(Y,M)$$

なる g^*, f^* は互いに逆写像，従って任意の k に対して $H^k(X,M) \cong H^k(Y,M)$ を得る． 特に X が可縮ならば定義により X は一点 x_0 と同じホモトピー型をもつから

$$H^k(X,M) \cong H^k(x_0,M)$$

が任意の k に対して成立する．然るに一点の上の層はすべて定義により脆弱層であるから $H^k(x_0,M)=0$ $(k>0)$ が成り立つ．更に一点からなる集合は連結だから $H^0(x_0,M)=M$ を得る．

以上により第1章定理 1.2.4 の証明は完結した．

§3. 基本的な種々の完全系列

以下では n 次元実解析的多様体 M を一つ固定して考えるので $\mathscr{A}_M$, $\mathscr{B}_M$, $\mathscr{C}_M$ 等を単に $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$ と記すことにする．この節ではまず M 上に層の完全系列

$$0 \longrightarrow \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B} \longrightarrow \pi_* \mathscr{C} \longrightarrow 0$$

が存在することを示す． これは microfunction の理論で最も基本的な完全系列である．これにより，“特異性の層”と呼ぶべき層 $\mathscr{B}/\mathscr{A}$ が $\pi_*\mathscr{C}$ と同型であること，換言すれば，$\mathscr{B}/\mathscr{A}$ の構造がより詳しく $\sqrt{-1}\,S^*M$ 上において解析されること，が判るからである．

次に $\sqrt{-1}SM$ 上で

$$0\longrightarrow\tilde{\mathscr{A}}\longrightarrow\tau^{-1}\mathscr{B}\longrightarrow\pi_*\tau^{-1}\mathscr{C}\longrightarrow 0$$

なる完全系列が存在することを証明する．これにより層 $\mathscr{C}$ の構造がより直観的な“正則函数の境界値”の概念と直接的に結びつくことが了解される．又，その応用として，超函数の**特異性スペクトル** (singularity spectrum, singular spectrum) (定義 2.3.3) に関する応用上有用な定理(定理 2.3.4 および定理 2.3.5) を証明する．

まず，これ等の完全系列を証明する為の手段として**一般化された相対コホモロジー群** $H^k(A^\cdot\xrightarrow{f}B^\cdot)$ の概念を導入する．

定義 2.3.1. $A^\cdot=\{\cdots\to A^n\xrightarrow{d_A^n}A^{n+1}\longrightarrow\cdots\}$，$B^\cdot=\{\cdots\to B^n\xrightarrow{d_B^n}B^{n+1}\cdots\to\}$ を二つの加群の複体とし，$f\colon A^\cdot\to B^\cdot$ を射とする．即ち，f は $f_{n+1}\circ d_A^n=d_B^n\circ f_n$ を満たす準同型 $f_n\colon A^n\to B^n$ の組 $\{f_n\}$ である．

この時 $C^\cdot=C(A^\cdot\xrightarrow{f}B^\cdot)$ を $C^n=A^n\oplus B^{n-1}$，により，また $d_C^n\colon A^n\oplus B^{n-1}\longrightarrow A^{n+1}\oplus B^n$ を $d_C^n(x,y)=(d_A^n x,\ d_B^{n-1}y+(-1)^n f_n(x))$ によって定義すると，$d_C^{n+1}\circ d_C^n=0$ が成り立つから $C^\cdot=\{\cdots\to C^n\xrightarrow{d_C^n}C^{n+1}\to\cdots\}$ も複体となる．この複体のコホモロジー群 $H^k(C^\cdot)$ を一般化された相対コホモロジー群 $H^k(A^\cdot\xrightarrow{f}B^\cdot)$ と呼ぶ*)．

命題 2.3.1.

(1) $\cdots\to H^k(A^\cdot\xrightarrow{f}B^\cdot)\longrightarrow H^k(A^\cdot)\longrightarrow H^k(B^\cdot)\longrightarrow H^{k+1}(A^\cdot\xrightarrow{f}B^\cdot)\to\cdots$

は完全系列である．

(2) $A^\cdot\xrightarrow{f}B^\cdot\xrightarrow{g}C^\cdot$ に対して

$$\cdots\to H^k(A^\cdot\xrightarrow{f}B^\cdot)\longrightarrow H^k(A^\cdot\xrightarrow{g\circ f}C^\cdot)\longrightarrow H^k(B^\cdot\xrightarrow{g}C^\cdot)\longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^{k+1}(A^\cdot\xrightarrow{f}B^\cdot)\to\cdots$$

は完全系列である．

［証明］ まず(1)を示そう．複体 $B^\cdot$ に対して複体 $B^\cdot[k]$ を $(B^\cdot[k])^n=B^{n+k}$ によって定義する．その時 $C(A^\cdot\to B^\cdot)$ の定義により

$$0\longrightarrow B^\cdot[-1]\longrightarrow C(A^\cdot\to B^\cdot)\longrightarrow A^\cdot\longrightarrow 0$$

---

*) $H^k(A^\cdot\to B^\cdot)$と略記することもある．これを何故一般化された相対コホモロジー群と呼ぶかについては，後述の命題 2.3.1，命題 2.3.2，特に命題 2.3.2(1)を参照されたい．

は完全系列であるから，コホモロジー群に移れば，求める完全系列が得られる．

次に(2)を示そう．$X^{\cdot}=C(A^{\cdot}\xrightarrow{g\circ f}C^{\cdot})$，$Y^{\cdot}=C(B^{\cdot}\xrightarrow{g}C^{\cdot})$ とおいて，$X^{\cdot}\xrightarrow{h}Y^{\cdot}$ なる射 h を $(x,y)\in A^n\oplus C^{n-1}=X^n$ に対して $h_n(x,y)=(f_n(x),y)\in B^n\oplus C^{n-1}=Y^n$ を対応させることにより定義しよう．ここで $Z^{\cdot}=C(X^{\cdot}\xrightarrow{h}Y^{\cdot})$ とおけば(1)より完全系列

$$\cdots\to H^n(X^{\cdot}\to Y^{\cdot})\longrightarrow H^n(A^{\cdot}\to C^{\cdot})\longrightarrow H^n(B^{\cdot}\to C^{\cdot})\to\cdots$$

を得る．よって

$$H^k(X^{\cdot}\xrightarrow{h}Y^{\cdot})=H^k(A^{\cdot}\xrightarrow{f}B^{\cdot})$$

が成り立つことを示せばよい．

さて $\{(x,y),(x',y')\}\in Z^n\underset{\text{def}}{=}(A^n\oplus C^{n-1})\oplus(B^{n-1}\oplus C^{n-2})$ に d_Z^n を施せば

$$\{(d_A^n x, d_C^{n-1}y+(-1)^n g_n\circ f_n(x)),\ (d_B^{n-1}x'+(-1)^n f_n(x),(-1)^n y+ \\ +d_C{}^{n-2}y'+(-1)^{n-1}g_{n-1}(x'))\}$$

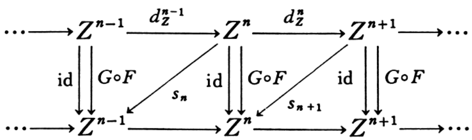
を得る．従って $W^{\cdot}=C(A^{\cdot}\xrightarrow{f}B^{\cdot})$ とおいて $F_n\colon Z_n\longrightarrow W_n$ なる写像を $F_n(\{(x,y),(x',y')\})=(x,x')$ と定義すれば $F\colon Z^{\cdot}\longrightarrow W^{\cdot}$ は射となる．

同様に，$G_n\colon W^n\to Z^n$ なる写像を $G_n(x,x')=\{(x,g_{n-1}(x')),(x',0)\}$ と定義すれば $G\colon W^{\cdot}\to Z^{\cdot}$ も射となり，しかも，$F\circ G\colon W^{\cdot}\to W^{\cdot}$ は明らかに恒等写像である．従ってコホモロジー群に移って考えれば，$H^n(W^{\cdot})\xrightarrow{G^*}H^n(Z^{\cdot})\xrightarrow{F^*}H^n(W^{\cdot})$ において $F^*\circ G^*\colon H^n(W^{\cdot})\to H^n(W^{\cdot})$ は恒等写像である．

さて $s_n\colon Z^n\to Z^{n-1}$ なる写像を

$$s_n(\{(x,y),(x',y')\})=\{(0,(-1)^n y'),(0,0)\}$$

により定義すれば，次の図式において



$s_{n+1}\circ d_Z^n+d_Z^{n-1}\circ s_n=(G\circ F)_n-\mathrm{id}_{Z^n}$ が成り立つ．このことから $G^*\circ F^*=\mathrm{id}_Z^*$ を得る．即ち $H^n(Z^{\cdot})\xrightarrow{F^*}H^n(W^{\cdot})\xrightarrow{G^*}H^n(Z^{\cdot})$ は恒等写像である．結局，F^*，G^* は互いに逆写像である．従って

$$H^k(X^{\cdot}\to Y^{\cdot})=H^k(Z^{\cdot})\cong H^k(W^{\cdot})=H^k(A^{\cdot}\to B^{\cdot})$$

を得る．　　　　(証終)

さて層係数の一般化された相対コホモロジー群を定義する為にいくつかの補題を準備しよう．

補題 1.　X, Y を位相空間，$f: X\to Y$ を連続写像，$\mathscr{F}$ を Y 上の層とする．その時，規準的な射 $\mathscr{F}\to f_*f^{-1}\mathscr{F}$ が存在する．

［証明］ $f^{-1}\mathscr{F}$ は X の開集合 V に $\varinjlim_{U\supset f(V)} \mathscr{F}(U)$ を対応させて得られる前層に付随した層である．従って Y の開集合 U に対して

$$\mathscr{F}(U)\longrightarrow \varinjlim_{U'\supset f(f^{-1}(U))} \mathscr{F}(U')\longrightarrow(f^{-1}\mathscr{F})(f^{-1}(U))=f_*f^{-1}\mathscr{F}(U)$$

なる写像が順次得られる．これより射 $\mathscr{F}\to f_*f^{-1}\mathscr{F}$ を得る．　　(証終)

補題 2.　$\mathscr{G}, \mathscr{F}$ を各々位相空間 X, Y 上の層，$f: X\to Y$ を連続写像とする時，射：$\mathscr{F}\to f_*\mathscr{G}$ を与えることと，射：$f^{-1}\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ を与えることは同値である．

［証明］ 射：$f^{-1}\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ が与えられれば，射：$f_*f^{-1}\mathscr{F}\to f_*\mathscr{G}$ が得られるから補題1により射：$\mathscr{F}\to f_*\mathscr{G}$ を得る．逆に射：$\mathscr{F}\to f_*\mathscr{G}$ が与えられたとしよう，Y の各開集合 U に対し $\mathscr{F}(U)\xrightarrow{\rho(U)}\mathscr{G}(f^{-1}(U))$ なる写像が与えられているから，X の開集合 V に対して $f(V)\subset U$ が成り立てば

$$\mathscr{F}(U)\longrightarrow\mathscr{G}(f^{-1}(U))\longrightarrow\mathscr{G}(V)$$

なる準同型が得られる．ここで $f(V)\subset U$ ならば $V\subset f^{-1}(U)$ が成り立つことに注意しよう．従って

$$\varinjlim_{f(V)\subset U} \mathscr{F}(U)\longrightarrow\mathscr{G}(V)$$

なる準同型が得られる．定義により V に $\varinjlim_{f(V)\subset U} \mathscr{F}(U)$ を対応させて得られる前層に付随した層が $f^{-1}\mathscr{F}$ であったから，結局 $f^{-1}\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ なる射が得られたことになる．　　(証終)

補題 3.　$\mathscr{G}, \mathscr{F}$ を位相空間 X, Y 上の層，$f: X\to Y$ を連続写像，$\rho: \mathscr{F}\to f_*\mathscr{G}$ を射とする．その時 $\mathscr{F}$ の脆弱分解 $0\to\mathscr{F}\to\mathscr{L}^{\cdot}$ に対して $\mathscr{G}$ の脆弱分解 $0\to\mathscr{G}\to\mathscr{M}^{\cdot}$ と射 $\rho_k: \mathscr{L}^k\to f_*\mathscr{M}^k$ がすべての $k(\geqq 0)$ に対して存在して次の可換図式が成り立つ．

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 \longrightarrow & \mathscr{F} & \longrightarrow & \mathscr{L}^0 & \longrightarrow & \mathscr{L}^1 & \longrightarrow & \mathscr{L}^2 & \longrightarrow & \mathscr{L}^3 & \to\cdots \\
 & \downarrow\rho & \circlearrowleft & \downarrow\rho_0 & \circlearrowleft & \downarrow\rho_1 & \circlearrowleft & \downarrow\rho_2 & \circlearrowleft & \downarrow\rho_3 & \\
0 \longrightarrow & f_*\mathscr{G} & \to & f_*\mathscr{M}^0 & \to & f_*\mathscr{M}^1 & \to & f_*\mathscr{M}^2 & \to & f_*\mathscr{M}^3 & \to\cdots
\end{array}$$

［証明］
$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{L}^0 \longrightarrow \mathscr{L}^1 \to \cdots$$
を $\mathscr{F}$ の脆弱分解とすれば
$$0 \longrightarrow f^{-1}\mathscr{F} \longrightarrow f^{-1}\mathscr{L}^0 \longrightarrow f^{-1}\mathscr{L}^1 \to \cdots$$
は完全系列である．補題2により $f^{-1}\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ なる射があるから第1章定理1.1.1の証明中の補題1により，$\mathscr{G}$ の脆弱分解
$$0 \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{M}^0 \longrightarrow \mathscr{M}^1 \to \cdots$$
であって
$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & f^{-1}\mathscr{F} & \longrightarrow & f^{-1}\mathscr{L}^0 & \longrightarrow & f^{-1}\mathscr{L}^1 & \to \cdots \\ & \downarrow & \circlearrowright & \downarrow & \circlearrowright & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & \mathscr{G} & \longrightarrow & \mathscr{M}^0 & \longrightarrow & \mathscr{M}^1 & \to \cdots \end{array}$$
となるものが存在する．よって　可換図式
$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & f_*f^{-1}\mathscr{F} & \longrightarrow & f_*f^{-1}\mathscr{L}^0 & \longrightarrow & f_*f^{-1}\mathscr{L}^1 & \to \cdots \\ & \downarrow & \circlearrowright & \downarrow & \circlearrowright & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & f_*\mathscr{G} & \longrightarrow & f_*\mathscr{M}^0 & \longrightarrow & f_*\mathscr{M}^1 & \to \cdots \end{array}$$
を得る．従って補題1により求める結果を得る．（証終）

定義 2.3.2. 上の補題3の記号のもとで $\rho: \mathscr{F} \longrightarrow f_*\mathscr{G}$ を $\mathscr{F} \xrightarrow{\rho} \mathscr{G}$ と略記することにする．この時
$$H^k(X \xrightarrow{f} Y,\ \mathscr{G} \xleftarrow{\rho} \mathscr{F}) = H^k(\Gamma(Y, \mathscr{L}^{\cdot}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{M}^{\cdot})),$$
$$\mathscr{D}ist_f^k(\mathscr{F} \xrightarrow{\rho} \mathscr{G}) = \mathscr{H}^k(\mathscr{L}^{\cdot} \to f_*\mathscr{M}^{\cdot})$$
と定義する*)．特に $\mathscr{G} = f^{-1}\mathscr{F}$ の時，
$$H^k(X \xrightarrow{f} Y,\ \mathscr{F}) = H^k(X \longrightarrow Y,\ f^{-1}\mathscr{F} \longleftarrow \mathscr{F})$$
$$\mathscr{D}ist_f^k(\mathscr{F}) = \mathscr{D}ist_f^k(\mathscr{F} \longrightarrow f^{-1}\mathscr{F})$$
と略記する．又，$\mathscr{D}ist_f^k(\mathscr{F}) = 0\ (k \neq r)$ が成り立つ時，f は $\mathscr{F}$ に関して**純 r 余次元的**である，と言う．

注意. 明らかに，$\mathscr{D}ist_f^n(\mathscr{F} \xrightarrow{\rho} \mathscr{G})$ とは Y の開集合 U に対して $H^n(f^{-1}(U) \xrightarrow{f} U,\ \mathscr{G} \xleftarrow{\rho} \mathscr{F})$ を対応させて得られる前層に付随した（Y 上の）層に他ならない．

定義2.3.2で与えられたコホモロジー群は，先に64頁の脚註で触れたように，各々 $H_Z^n(X, \mathscr{F})$ および $\mathscr{H}_Z^n(\mathscr{F})$ の拡張と考えられる．即ち，

命題 2.3.2. X が Y の開集合で $f: X \hookrightarrow Y$ を埋め込み写像とする．この時，

---

*) 前後関係から明らかな時は，これらの記号において f, ρ を略することもある．

(1) $H^n(X\to Y,\ \mathscr{F})\cong H^n_{Y-X}(Y,\mathscr{F})$

(2) $\mathscr{D}ist^n_f(\mathscr{F})\cong\mathscr{H}^n_{Y-X}(\mathscr{F})$.

［証明］ まず次の補題を証明しよう．

補題. $0\longrightarrow E^{\cdot}\xrightarrow{e}A^{\cdot}\xrightarrow{f}B^{\cdot}\longrightarrow 0$

が完全系列であれば

$$H^n(E^{\cdot})\cong H^n(A^{\cdot}\xrightarrow{f}B^{\cdot})$$

が任意の n に対して成立する．

［証明］ $g_n\colon E^n\to A^n\oplus B^{n-1}$ なる準同型を $g_n(x)=(e_n(x),0)$ によって定義すれば，これにより 射 $g\colon E^{\cdot}\to C^{\cdot}\underset{\text{def}}{=}C(A^{\cdot}\xrightarrow{f}B^{\cdot})$ を得る．明らかに

$$0\longrightarrow B[-1]^{\cdot}\xrightarrow{h}C^{\cdot}\xrightarrow{k}A^{\cdot}\longrightarrow 0$$

は完全系列である．更にこの時，次の図式が可換になることは容易に確かめられる．

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots\to H^{n-1}(A^{\cdot}) & \xrightarrow{f^*} & H^{n-1}(B^{\cdot}) & \longrightarrow & H^n(E^{\cdot}) & \xrightarrow{e^*} & H^n(A^{\cdot}) & \xrightarrow{f^*} & H^n(B^{\cdot})\to\cdots \\
\| & \circlearrowleft & \wr\downarrow(-1)^{n-1}\mathrm{id} & \circlearrowleft & \downarrow g^* & \circlearrowleft & \| & \circlearrowleft & \wr\downarrow(-1)^n\mathrm{id} \\
\cdots\to H^{n-1}(A^{\cdot}) & \longrightarrow & H^{n-1}(B^{\cdot}) & \xrightarrow[-h^*]{} & H^n(C^{\cdot}) & \xrightarrow[k^*]{} & H^n(A^{\cdot}) & \longrightarrow & H^n(B^{\cdot})\to\cdots
\end{array}$$

従って Five lemma により $H^n(E^{\cdot})\cong H^n(C^{\cdot})=H^n(A^{\cdot}\xrightarrow{f}B^{\cdot})$ を得る．

（補題の証終）

命題 2.3.2 の証明に戻ろう．

$$0\longrightarrow\mathscr{F}\longrightarrow\mathscr{L}^0\longrightarrow\mathscr{L}^1\to\cdots$$

を $\mathscr{F}$ の脆弱分解とすれば，$f^{-1}\mathscr{L}^k=\mathscr{L}^k|_X$ は脆弱層であるから $0\to f^{-1}\mathscr{F}\to f^{-1}\mathscr{L}^0\to f^{-1}\mathscr{L}^{-1}\to\cdots$ は $f^{-1}\mathscr{F}$ の脆弱分解となる．又，$\mathscr{L}^k$ は脆弱層であるから

$$0\longrightarrow\Gamma_{Y-X}(Y,\mathscr{L}^{\cdot})\longrightarrow\Gamma(Y,\mathscr{L}^{\cdot})\longrightarrow\Gamma(X,\mathscr{L}^{\cdot}|_X)\longrightarrow 0$$

は完全列である．従って補題により

$$H^n(X\to Y,\mathscr{F})=H^n(\Gamma(Y,\mathscr{L}^{\cdot})\longrightarrow\Gamma(X,\mathscr{L}^{\cdot}))=H^n(\Gamma_{Y-X}(Y,\mathscr{L}^{\cdot})=H^n_{Y-X}(Y,\mathscr{F})$$

が成立する．

同様にして完全系列

$$0\longrightarrow\Gamma_{Y-X}(\mathscr{L}^{\cdot})\longrightarrow\mathscr{L}^{\cdot}\longrightarrow f_*f^{-1}\mathscr{L}^{\cdot}\longrightarrow 0$$

より

$$\mathscr{D}ist^n_f(\mathscr{F})=\mathscr{H}^n(\mathscr{L}^{\cdot}\to f_*f^{-1}\mathscr{L}^{\cdot})\cong\mathscr{H}^n(\Gamma_{Y-X}(\mathscr{L}^{\cdot}))=\mathscr{H}^n_{Y-X}(\mathscr{F})$$

を得る． (証終)

命題 2.3.3. (1) $\mathscr{G},\mathscr{F}$ を各々位相空間 X, Y 上の層，$f\colon X\to Y$ を連続写像として射 $\rho\colon \mathscr{F}\to f_*\mathscr{G}$ が与えられたとする．この時

(i) $$\cdots\to H^k(X\to Y,\ \mathscr{G}\leftarrow\mathscr{F})\longrightarrow H^k(Y,\mathscr{F})\longrightarrow H^k(X,\mathscr{G})\to\cdots\cdots\to \qquad (完全)$$

特に

$$\cdots\to H^k(X\to Y,\mathscr{F})\longrightarrow H^k(Y,\mathscr{F})\longrightarrow H^k(X,f^{-1}\mathscr{F})\to\cdots \qquad (完全)$$

(ii) $$0\longrightarrow \mathscr{D}ist_f^0(\mathscr{F}\to\mathscr{G})\longrightarrow\mathscr{F}\xrightarrow{\ \rho\ } f_*\mathscr{G}\longrightarrow\mathscr{D}ist_f^1(\mathscr{F}\to\mathscr{G})\longrightarrow 0 \qquad (完全),$$
$$\mathscr{D}ist_f^k(\mathscr{F}\to\mathscr{G})=R^{k-1}f_*\mathscr{G} \qquad (k\geqq 2),$$

特に

$$0\longrightarrow\mathscr{D}ist_f^0(\mathscr{F})\longrightarrow\mathscr{F}\longrightarrow f_*f^{-1}\mathscr{F}\longrightarrow\mathscr{D}ist_f^1(\mathscr{F})\longrightarrow 0 \qquad (完全),$$
$$\mathscr{D}ist_f^k(\mathscr{F})=R^{k-1}f_*(f^{-1}\mathscr{F}) \qquad (k\geqq 2)$$

が成立する．

(2) $\mathscr{G},\mathscr{F},\mathscr{H}$ を各々位相空間 X, Y, Z 上の層，$f\colon X\to Y$, $g\colon Y\to Z$ を連続写像とする．更に $\mathscr{F}\to f_*\mathscr{G}, \mathscr{H}\to g_*\mathscr{F}$ なる射が各々与えられたとする．その時，

$$\cdots\to H^k(Y\to Z,\ \mathscr{F}\leftarrow\mathscr{H})\longrightarrow H^k(X\to Z,\ \mathscr{G}\leftarrow\mathscr{H})\longrightarrow H^k(X\to Y,\mathscr{G}\leftarrow\mathscr{F})\to\cdots$$

は完全系列である．特に

$$\cdots\to H^k(Y\to Z,\mathscr{H})\longrightarrow H^k(X\to Z,\mathscr{H})\longrightarrow H^k(X\to Y, g^{-1}\mathscr{H})\to\cdots$$

は完全系列である．

［証明］ 定義と命題 2.3.1 より明らかである．

さて命題 2.3.3 の (2) を $X-M\overset{\iota}{\hookrightarrow}\widetilde{{}^M X}\xrightarrow{\ \tau\ }X$ と X 上の層 $\mathcal{O}_X$ に適用すると

$$\cdots\to H^k(\widetilde{{}^M X}\to X,\mathcal{O}_X)\longrightarrow H^k(X-M\hookrightarrow X,\mathcal{O}_X)\longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^k(X-M\hookrightarrow\widetilde{{}^M X},\tau^{-1}\mathcal{O}_X)\to\cdots$$

なる完全系列を得る．以下各項の計算を行おう．命題 2.3.2 により

$$H^k(X-M\hookrightarrow X,\mathcal{O}_X)=H_M^k(X,\mathcal{O}_X)$$

が成立する．然るに M の $\mathcal{O}_X$ に関する純 n 余次元性と第1章命題 1.1.5 により，$k<n$ ならば

$$H_M^k(X,\mathcal{O}_X)=0$$

が成り立つ．他方，flabby dim $\mathcal{O}_X\leqq n$ (第1章定理 1.1.4) と第1章定理 1.1.3

により，$k>n$ ならば

$$H_M^k(X, \mathcal{O}_X)=0$$

が成立する．従って $k\neq n$ ならば

$$H^k(X-M\hookrightarrow X, \mathcal{O}_X)=0$$

が成立する．

同様に，命題2.1.1と第1章命題1.1.6を用いて

$$H^k(X-M\hookrightarrow {}^M\widetilde{X},\ \tau^{-1}\mathcal{O}_X)=H^k_{\sqrt{-1}SM}({}^M\widetilde{X},\ \tau^{-1}\mathcal{O}_X)=H^{k-1}(\sqrt{-1}SM, \mathcal{Q})$$

が成立することが判る．

次に $H^k({}^M\widetilde{X}\xrightarrow{\tau}X, \mathcal{O}_X)$ を計算する為の，いくつかの命題を証明しよう．

命題 2.3.4.　X, Yを位相空間，$f: X\to Y$ を連続写像として $\mathcal{F}$ を Y 上の層とする．f が $\mathcal{F}$ に関して純 l 余次元的ならば

$$H^k(X\to Y, \mathcal{F})=H^{k-l}(Y, \mathcal{D}ist_f^l(\mathcal{F}))$$

が任意の k に対して成立する．

［証明］　$0\to\mathcal{F}\to\mathcal{L}^\cdot$，$0\to f^{-1}\mathcal{F}\to\mathcal{M}^\cdot$ を各々 $\mathcal{F}, f^{-1}\mathcal{F}$ の脆弱分解として $\mathcal{N}^\cdot=C(\mathcal{L}^\cdot\to f_*\mathcal{M}^\cdot)$ とおけば，$\mathcal{D}ist_f^k(\mathcal{F})=\mathcal{H}^k(\mathcal{N}^\cdot)$ である．更に $\mathcal{N}^\cdot$ は脆弱層のつくる複体であり，又，仮定より

$$0\longrightarrow\mathcal{N}^0\longrightarrow\mathcal{N}^1\longrightarrow\cdots\to\mathcal{N}^{l-1}\longrightarrow\mathcal{I}\longrightarrow 0$$
$$0\longrightarrow\mathcal{I}\longrightarrow\mathcal{Z}\longrightarrow\mathcal{D}ist_f^l(\mathcal{F})\longrightarrow 0$$
$$0\longrightarrow\mathcal{Z}\longrightarrow\mathcal{N}^l\longrightarrow\mathcal{N}^{l+1}\to\cdots$$

なる三つの完全系列が得られる．従ってこれ以降の証明は，第1章の命題1.1.5および命題1.1.6と全く同様にして遂行できる．　(証終)

命題 2.3.5.　位相空間 X, Y に対し，各々その開部分集合がすべてパラコンパクトかつハウスドルフであるとする．$f: X\to Y$ を連続閉写像，$\mathcal{F}$ を Y 上の層とすれば，任意の $y\in Y$ に対して

$$\mathcal{D}ist_f^k(\mathcal{F})_y=H^k(f^{-1}(y)\to\{y\}, \mathcal{F}_y)$$

が成り立つ．

注意.　X, Y をハウスドルフ空間，$f:X\to Y$ を固有写像としても命題は成り立つ．

［証明］　命題2.1.4により f が閉写像であることを用いれば

$$\varinjlim_{\{y\}\in U} H^k(U, \mathscr{F}) = H^k(\{y\}, \mathscr{F}_y), \quad \varinjlim_{y\in U} H^k(f^{-1}(U), f^{-1}\mathscr{F}) = H^k(f^{-1}(y), f^{-1}\mathscr{F}_y)$$

を得る．よって可換図式

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots\to H^{k-1}(U, \mathscr{F}) & \longrightarrow & H^{k-1}(f^{-1}(U), f^{-1}\mathscr{F}) & \longrightarrow & H^k(f^{-1}(U)\to U, \mathscr{F}) & \longrightarrow \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots\to H^{k-1}(\{y\}, \mathscr{F}_y) & \longrightarrow & H^{k-1}(f^{-1}(y), \mathscr{F}_y) & \longrightarrow & H^k(f^{-1}(y)\to\{y\}, \mathscr{F}) & \longrightarrow
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\longrightarrow & H^k(U, \mathscr{F}) & \longrightarrow & H^k(f^{-1}(U), f^{-1}\mathscr{F}) & \to\cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
\longrightarrow & H^k(\{y\}, \mathscr{F}_y) & \longrightarrow & H^k(f^{-1}(y), \mathscr{F}_y) & \longrightarrow\cdots
\end{array}$$

において帰納的極限をとれば Five lemma により

$$\mathscr{D}ist_f^k(\mathscr{F})_y = \varinjlim_{y\in U} H^k(f^{-1}U\to U, \mathscr{F}) = H^k(f^{-1}(y)\to\{y\}, \mathscr{F})$$

を得る． （証終）

命題 2.3.6. G を n 次元球面 S^n 上の定数層とすれば

(1)
$$H^k(S^0, G) = \begin{cases} G\oplus G & (k=0) \\ 0 & (k\neq 0), \end{cases}$$

および

$$H^k(S^n, G) = \begin{cases} G & (k=0, n(\neq 0)) \\ 0 & (k\neq 0, n) \end{cases}$$

が成立する．

(2)
$$H^k(S^n\to\{x_0\}, G) = \begin{cases} G & (k=n+1) \\ 0 & (k\neq n+1) \end{cases}$$

が成立する．

(3) 任意の k に対して

$$H^k(\{y_0\}\to\{x_0\}, G) = 0$$

が成立する．

［証明］ まず(1)を証明しよう．S^0 は2点からなり，2点の上の層は定義によりすべて脆弱層だから最初の場合は明らか．$n\geqq 1$ の時 D_1^n, D_2^n を S^n の二つの閉半球で $D_1^n\cap D_2^n = S^{n-1}$ となるものとすれば各 $D_i^n (i=1, 2)$ は可縮であるから，$k\neq 0$ ならば $H^k(D_i^n, G)=0$ が成立する．他方

$$0\to\Gamma(S^n, \mathscr{L})\xrightarrow{\varphi}\Gamma(D_1^n, \mathscr{L})\oplus\Gamma(D_2^n, \mathscr{L})\xrightarrow{\psi}\Gamma(S^{n-1}, \mathscr{L})\to 0$$

なる写像 φ, ψ を $\varphi(s)=(s|_{D_1^n}, s|_{D_2^n}), \psi(s_1, s_2)=s_1|_{S^{n-1}}-s_2|_{S^{n-1}}$ により定義する時，$\mathscr{L}$ が S^n 上の脆弱層ならば，前頁の図式は完全系列となる（命題 2.1.4 参照）．従って定数層 G の脆弱分解を用いれば，

$$\cdots\to H^k(S^n, G)\to H^k(D_1^n, G)\oplus H^k(D_2^n, G)\to H^k(S^{n-1}, G)\to\cdots$$

なる完全系列を得る．従って $n=1$ の時には，$i: G\to G\oplus G$ を $i(x)=(x, x)$ により，又 $j: G\oplus G\to G\oplus G$ を $j(x, y)=(x-y, x-y)$ により，各々定めれば

$$0\longrightarrow G\xrightarrow{i} G\oplus G\xrightarrow{j} G\oplus G\longrightarrow H^1(S^1, G)\longrightarrow 0$$

は完全系列となり，$k\geqq 2$ 以上ならば $0\to H^k(S^1, G)\to 0$ が完全系列となるから求める結果が得られる．又，$n\geqq 2$ の時は $j': G\oplus G\to G$ を $j'(x, y)=x-y$ により定めれば

$$0\longrightarrow G\xrightarrow{i} G\oplus G\xrightarrow{j'} G\longrightarrow H^1(S^n, G)\longrightarrow 0$$

が完全系列となり，更に $k\geqq 2$ の時

$$0\longrightarrow H^{k-1}(S^{n-1}, G)\longrightarrow H^k(S^n, G)\longrightarrow 0$$

が完全系列となるから，帰納法により求める結果が得られる．

次に (2) の証明を行なおう．

$$\cdots\to H^k(S^n\to\{x_0\}, G)\longrightarrow H^k(\{x_0\}, G)\longrightarrow H^k(S^n, G)\to\cdots$$

なる完全系列と (1) および $H^k(\{x_0\}, G)=0$ $(k\neq 0)$ より直ちに得られる．($H^k(\{x_0\}, G)=0$ $(k\neq 0)$ は，一点の上の層はすべて脆弱層であることから得られる．)

最後に (3) の証明を与えよう．

$$\cdots\to H^k(\{y_0\}\to\{x_0\}, G)\longrightarrow H^k(\{x_0\}, G)\longrightarrow H^k(\{y_0\}, G)\to\cdots$$

なる完全系列により，$k\geqq 2$ の場合は明らかである．又 $k=0, 1$ の場合は，

$$0\longrightarrow H^0(\{y_0\}\to\{x_0\}, G)\longrightarrow G\xrightarrow{\sim} G\longrightarrow H^1(\{y_0\}\to\{x_0\}, G)\longrightarrow 0$$

なる完全系列に注意すればよい． (証終)

次に，ここでは証明はしないけれど，以下の議論に基本的な次の定理を述べておこう．

定理 2.3.1. (Grauert [1]) 実解析的多様体 M 上の実解析函数の作る層を $\mathscr{A}$，orientation sheaf を ω とする時

$$H^k(M, \mathscr{A}\otimes\omega)=0 \quad (k\neq 0)$$

が成立する．

命題 2.3.7. $H^k(\widetilde{{}^M X} \xrightarrow{\tau} X, \mathcal{O}_X) = \begin{cases} 0 & (k \neq n) \\ (\mathcal{A} \otimes \omega)(M) & (k = n) \end{cases}$

が成立する．

［証明］ まず $\mathcal{D}ist^k_\tau(\mathcal{O}_X)$ を計算しよう． τ は固有写像であるから命題2.3.5により

$$\mathcal{D}ist^k_\tau(\mathcal{O}_X)_x = H^k(\tau^{-1}(x) \to \{x\}, \mathcal{O}_{X,x})$$

が成立する．

今，$x \in X-M$ とすると $\tau^{-1}(x) \cong \{x\}$ であるから， 命題2.3.6の(3)により $\mathcal{D}ist^k_\tau(\mathcal{O}_X)_x = 0$ である． $x \in M$ なら $\tau^{-1}(x) = S^{n-1}$ 故，同じく命題2.3.6の(2)により $\mathcal{D}ist^k_\tau(\mathcal{O}_X)_x = 0$ $(k \neq n)$ および $\mathcal{D}ist^n_\tau(\mathcal{O}_X)_x = \mathcal{O}_{X,x}$ を得るから，$H^n(S^{n-1} \to \{x\}, G) \cong G$ なる同型対応が向き付けに依存していることに注意すれば，結局， $\mathcal{D}ist^k_\tau(\mathcal{O}_X) = 0$ $(k \neq n)$ および $\mathcal{D}ist^k_\tau(\mathcal{O}_X) = \mathcal{A} \otimes \omega$ を得る． 従って，命題2.3.4により

$$H^k(\widetilde{{}^M X} \xrightarrow{\tau} X, \mathcal{O}_X) = H^{k-n}(X, \mathcal{A} \otimes \omega) = H^{k-n}(M, \mathcal{A} \otimes \omega)$$

が成立する．従って Grauert の定理(定理2.3.1)により求める結果を得る．

（証終）

以上の結果をまとめれば，完全系列

$$\cdots \to H^k(\widetilde{{}^M X} \xrightarrow{\tau} X, \mathcal{O}_X) \to H^k((X-M) \hookrightarrow X, \mathcal{O}_X) \to H^k((X-M) \hookrightarrow \widetilde{{}^M X}, \tau^{-1}\mathcal{O}_X) \to \cdots$$

において

$$H^k(\widetilde{{}^M X} \xrightarrow{\tau} X, \mathcal{O}_X) = \begin{cases} 0 & (k \neq n) \\ (\mathcal{A} \otimes \omega)(M) & (k = n) \end{cases}$$

$$H^k((X-M) \hookrightarrow X, \mathcal{O}_X) = \begin{cases} 0 & (k \neq n) \\ H^n_M(X, \mathcal{O}_X) & (k = n) \end{cases}$$

$$H^k((X-M) \hookrightarrow \widetilde{{}^M X}, \tau^{-1}\mathcal{O}_X) = H^{k-1}(\sqrt{-1}SM, \mathcal{Q})$$

が得られたから，結局

(2.3.1) $0 \to H^{n-2}(\sqrt{-1}SM, \mathcal{Q}) \to \mathcal{A} \otimes \omega(M) \to H^n_M(X, \mathcal{O}_X) \to H^{n-1}(\sqrt{-1}SM, \mathcal{Q}) \to$
$\to 0$ （完全）

(2.3.2) $H^k(\sqrt{-1}SM, \mathcal{Q}) = 0 \qquad (k \neq n-1, n-2)$

という結果が得られる．ここで(2.3.1)，(2.3.2)は M をその任意の開部分集合に

置き換えても成立することと，$H^k(\sqrt{-1}SM,\mathcal{Q})=H^k(\tau^{-1}(M),\mathcal{Q})$ に注意すれば，(2.3.1)，(2.3.2)の局所化として

(2.3.3)　$0\to R^{n-2}\tau_*\mathcal{Q}\to\mathcal{A}\otimes\omega\to\mathcal{H}^n_M(\mathcal{O}_X)\to R^{n-1}\tau_*\mathcal{Q}\to 0$　(完全)

(2.3.4)　$R^k\tau_*\mathcal{Q}=0 \qquad (k\neq n-1,\,n-2)$

という結果が得られる．ここで $\omega\underset{\boldsymbol{Z}}{\otimes}\omega=\boldsymbol{Z}_M$ に注意すれば(2.3.3)より

(2.3.5)　$0\to R^{n-2}\tau_*\mathcal{Q}\otimes\omega\to\mathcal{A}\to\mathcal{B}\to R^{n-1}\tau_*\mathcal{Q}\otimes\omega\to 0$　(完全)

を得る．次にこの完全系列の初項と終項を計算しよう．

命題 2.3.8.
$$R^k\tau_*\mathcal{Q}=\begin{cases}0 & (k\neq n-1)\\ \pi_*\mathcal{C}^a\otimes\omega & (k=n-1)\end{cases}$$
が成立する．

［証明］　先ず次の補題を証明しよう．

補題．　X, Y, Z を位相空間，$f\colon X\to Y$，$g\colon Y\to Z$ を連続写像とする．$\mathcal{F}$ が X 上の層で，かつ f が $\mathcal{F}$ に関して純 l 次元的ならば任意の k に対して
$$R^k(g\circ f)_*\mathcal{F}=R^{k-l}g_*(R^lf_*\mathcal{F})$$
が成立する．

［証明］　命題 2.2.1 証明中の補題 2 により $H^k(X,\mathcal{F})=H^{k-l}(Y,R^lf_*\mathcal{F})$ が成り立つから Z の開集合 U に対して $H^k(f^{-1}g^{-1}(U),\ \mathcal{F})=H^{k-l}(g^{-1}(U),R^lf_*\mathcal{F})$ を得る．一方，U に対して $H^k(f^{-1}g^{-1}(U),\mathcal{F})$ を対応させて得られる Z 上の前層を層化したものが $R^k(g\circ f)_*\mathcal{F}$ であり，U に対して $H^{k-l}(g^{-1}(U),\ R^lf_*(\mathcal{F}))$ を対応させて得られる Z 上の前層を層化したものが $R^{k-l}g_*(R^lf_*\mathcal{F})$ であるから求める結果を得る．　(証終)

さて $x_0+\sqrt{-1}v0\in\sqrt{-1}SM$ に対して $\pi^{-1}(x_0+\sqrt{-1}v0)$ は可縮であるから
$$R^k\pi_*(\pi^{-1}\mathcal{Q})_{x+\sqrt{-1}v0}=H^k(\pi^{-1}(x+\sqrt{-1}v0),\ \mathcal{Q}_{x+\sqrt{-1}v0})=\begin{cases}0 & (k\neq 0)\\ \mathcal{Q}_{x+\sqrt{-1}v0} & (k=0),\end{cases}$$
即ち
$$R^k\pi_*(\pi^{-1}\mathcal{Q})=\begin{cases}0 & (k\neq 0)\\ \mathcal{Q} & (k=0)\end{cases}$$
が成立する．よって補題により，$R^k\tau_*\mathcal{Q}=R^k(\tau\circ\pi)_*(\pi^{-1}\mathcal{Q})=R^k(\pi\circ\tau)_*(\pi^{-1}\mathcal{Q})$ が成立する．他方，命題 2.1.2′ により

$$R^k\tau_*(\pi^{-1}\mathcal{Q})=\begin{cases}\mathcal{C}^a\otimes\omega & (k=n-1)\\ 0 & (k\neq n-1)\end{cases}$$

であったから，再び補題により

$$R^k(\pi\circ\tau)_*(\pi^{-1}\mathcal{Q})=R^{k-n+1}\pi_*(\mathcal{C}^a\otimes\omega)$$

が成り立つ．従って

$$R^k\tau_*\mathcal{Q}=(R^{k-n+1}\pi_*\mathcal{C}^a)\otimes\omega$$

が成立する．ここで $k=n-2, n-1$ と置くことにより，$R^{n-2}\tau_*\mathcal{Q}=0$ および $R^{n-1}\tau_*\mathcal{Q}=\pi_*\mathcal{C}^a\otimes\omega$ を各々得る． (証終)

以上をまとめて次の定理を得る．

定理 2.3.2. (1) M 上で次の完全系列が成り立つ．

$$0\longrightarrow\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}\xrightarrow{\text{sp}}\pi_*\mathcal{C}\longrightarrow 0$$

(2) $k\neq 0$ ならば $R^k\pi_*\mathcal{C}=0$.

(3) $0\to\mathcal{A}(M)\to\mathcal{B}(M)\xrightarrow{\text{sp}}\mathcal{C}(\sqrt{-1}S^*M)\to 0$

は完全系列である．

［証明］ (1)は $\pi_*\mathcal{C}^a=\pi_*\mathcal{C}$ に注意すれば(2.3.5)および命題 2.3.8 により直ちに得られる．

(2)は命題 2.3.8 の証明中で既に得られている．

(3)：(1)により，$0\to\mathcal{A}(M)\to\mathcal{B}(M)\to\mathcal{C}(\sqrt{-1}S^*M)\to H^1(M,\mathcal{A})$ が完全系列となる．一方 Grauert の定理(定理 2.3.1)により $H^1(M,\mathcal{A})=0$ であるから，求める完全系列を得る． (証終)

定義 2.3.3. $u\in\mathcal{B}(M)$ に対して $\text{sp}(u)\in\pi_*\mathcal{C}(M)=\mathcal{C}(\sqrt{-1}S^*M)$ を u の**スペクトル** (spectrum) と言う．sp(u) の台を S.S.u と記して u の**特異(性)スペクトル** (singularity spectrum, singular spectrum) と呼ぶ．

系. $u\in\mathcal{B}(M)$ に対して，S.S.$u=\phi$ であると云うことと，u が M 上の実解析函数であると云うことは同値である．

［証明］ 定理 2.3.2 の(3)より明らかである．

注意. Singular spectrum という名称は Boutet de Monvel 氏の示唆による．スペクトルなる語は，そもそも光を周波数に応じて分解して得られるもの，より数学的には，ある函数のフーリエ変換像の台を意味することから考えてなかなかよい語感だと思う(そう思う理由は，たとえば次節例 2.4.6 である)が，作用

素のスペクトル理論での用語と紛らわしいのが難点で，その意味では小松氏の提案された singularity spectrum の方が好ましい．いくつか他の名称も提案されているようだが，最も広く用いられており，又，内容的にもぴったりしていると思われる“特異性スペクトル”をここでは採用することにした．なお，u が distribution の場合には類似の概念が Hörmander [2] によって超函数論におけると同様の研究を可能とする為に導入され (analytic) wave front set と名付けられている．又，同じく，u が distribution の時には，物理的考察を出発点として，類似の概念が essential support の名前で，Bros-Iagolnitzer (Iagolnitzer[1] およびそこの文献参照)によって導入された．なお，u が distribution の場合，これ等三つの概念 (singularity spectrum, analytic wave front set, essential support) が一致することは，Bros-Iagolnitzer, Bony-Schapira, 片岡，西和田，Hill の諸氏によって最近(1975-1976)各々独立に示された．本書では必要としないので，これについては省略する．これについては，Bony[2] およびそこに挙げられた文献を参照されたい．

さて次の目標は規準的な射 $b\colon \tilde{\mathscr{A}}\to\tau^{-1}\mathscr{B}$ を構成し，その射 b に対して $\sqrt{-1}SM$ 上に $0\to\tilde{\mathscr{A}}\xrightarrow{b}\tau^{-1}\mathscr{B}\longrightarrow\pi_*\tau^{-1}\mathscr{C}\to 0$ なる完全系列が存在することを示すことである．

命題 2.3.9. π を $DM\underset{\sqrt{-1}S^*M}{\times}DM$ から $\sqrt{-1}SM\underset{M}{\times}\sqrt{-1}SM$ への自然な射影とし，$\mathscr{F}$ を $\sqrt{-1}SM\underset{M}{\times}\sqrt{-1}SM$ 上の層とする．この時

$$\mathscr{D}ist_\pi^k(\mathscr{F})=\begin{cases}0 & (k\neq n-1)\\ \mathscr{F}|_{\triangle^a_{\sqrt{-1}SM}}\otimes\omega & (k=n-1)\end{cases}$$

が成り立つ，但し，ここで $\triangle^a_{\sqrt{-1}SM}=\{(x+\sqrt{-1}v0, x-\sqrt{-1}v0)\in\sqrt{-1}SM\underset{M}{\times}\sqrt{-1}SM\}$ とおいた．Antidiagonal set の意である．

［証明］ π は固有写像であるから命題 2.3.5 により $x(v_1, v_2)=(x+\sqrt{-1}v_10, x+\sqrt{-1}v_20)$ に対して

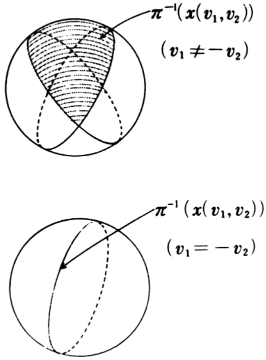
$$\mathscr{D}ist_\pi^k(\mathscr{F})_{x(v_1,v_2)}=H^k(\pi^{-1}(x(v_1, v_2))\to\{x(v_1, v_2)\}, \mathscr{F}_{x(v_1,v_2)})$$

が成立する．他方，$\pi^{-1}(x(v_1, v_2))=\{\xi\in S^{n-1}\mid\langle v_1, \xi\rangle\leqq 0,\ \langle v_2, \xi\rangle\leqq 0\}$ であるから，$v_1\neq -v_2$ ならば $\pi^{-1}(x(v_1, v_2))$ は一点に可縮となり (図 2.3.1(a)参照)，

図 2.3.1.

(a)

(b)



$$\mathscr{D}ist_\pi^k(\mathscr{F})_{x(v_1, v_2)} = 0$$

が成立する.

$v_1 = -v_2$ ならば $\pi^{-1}(x(v_1, v_2)) = S^{n-2}$ となり (図 2.3.1 (b) 参照) 命題 2.3.6 の (2) により

$$\mathscr{D}ist_\pi^k(\mathscr{F})_{x(v_1, v_2)} = \begin{cases} 0 & (k \neq n-1) \\ \mathscr{F}_{x(v_1, v_2)} \otimes \omega & (k = n-1) \end{cases}$$

を得る.　　(証終)

命題 2.3.10. X, Y, Z を位相空間, $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ を連続写像, $\mathscr{F}$ を Y 上の層とする. f が $\mathscr{F}$ に関して純 l 余次元的ならば

$$\cdots \to R^{k-l} g_* \mathscr{D}ist_f^l(\mathscr{F}) \longrightarrow R^k g_* \mathscr{F} \longrightarrow R^k(g \circ f)_*(f^{-1}\mathscr{F}) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow R^{k-l+1} g_* \mathscr{D}ist_f^l(\mathscr{F}) \to \cdots$$

は完全系列である.

[証明]　$0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{L}^{\cdot}$, $0 \to f^{-1}\mathscr{F} \to \mathscr{M}^{\cdot}$ を各々 $\mathscr{F}$, $f^{-1}\mathscr{F}$ の脆弱分解として, $\mathscr{N}^{\cdot} = C(\mathscr{L}^{\cdot} \to f_* \mathscr{M}^{\cdot})$ と置けば

$$\begin{cases} \mathscr{D}ist_f^k(\mathscr{F}) = \mathscr{H}^k(\mathscr{N}^{\cdot}) \\ R^k g_* \mathscr{F} = \mathscr{H}^k(g_* \mathscr{L}^{\cdot}), \\ R^k(g \circ f)_*(f^{-1}\mathscr{F}) = \mathscr{H}^k((g \circ f)_* \mathscr{M}^{\cdot}) \end{cases}$$

が成立する. さて $0 \to f_* \mathscr{M}^{k-1} \to \mathscr{N}^k \to \mathscr{L}^k \to 0$ は完全系列であり, $f_* \mathscr{M}^{k-1}$ が脆弱層であることから, $0 \to g_* f_* \mathscr{M}^{k-1} \to g_* \mathscr{N}^k \to g_* \mathscr{L}^k \to 0$ は完全系列となり, 又, $g_* f_* \mathscr{M}^{k-1} = (g \circ f)_* \mathscr{M}^{k-l}$ が成り立つ. 従って

$$\cdots \to \mathscr{H}^k(g_* \mathscr{N}^{\cdot}) \longrightarrow R^k g_* \mathscr{F} \longrightarrow R^k(g \circ f)_*(f^{-1}\mathscr{F}) \longrightarrow \mathscr{H}^{k+1}(g_* \mathscr{N}^{\cdot}) \to \cdots$$

は完全系列となる. 従って, $\mathscr{D}ist_f^k(\mathscr{F}) = 0$ $(k \neq l)$ なる仮定の下で

$$\mathscr{H}^k(g_* \mathscr{N}^{\cdot}) = R^{k-l} g_* \mathscr{D}ist_f^l(\mathscr{F})$$

を示せばよい.

仮定より $k \neq l$ ならば $\mathscr{H}^k(\mathscr{N}^{\cdot}) = 0$ が成立するから

$$\mathscr{Z} = \frac{\mathscr{N}^l}{\mathrm{Im}(\mathscr{N}^{l-1} \longrightarrow \mathscr{N}^l)}$$

とおけば

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}^0 \longrightarrow \mathcal{N}^1 \to \cdots \to \mathcal{N}^{l-1} \longrightarrow \mathcal{N}^l \longrightarrow \mathcal{Z} \longrightarrow 0$$

は完全系列となり，しかも各 $\mathcal{N}^i$ は脆弱層であるから $\mathcal{Z}$ も脆弱層となる．従って

$$0 \longrightarrow g_*\mathcal{N}^0 \longrightarrow g_*\mathcal{N}^1 \to \cdots \to g_*\mathcal{N}^l \longrightarrow g_*\mathcal{Z} \longrightarrow 0$$

なる完全系列により，$k<l$ ならば $\mathcal{H}^k(g_*\mathcal{N}^{\cdot})=0=R^{k-l}g_*\mathcal{D}ist_f^l(\mathcal{F})$ が成り立つ．次に

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}^l(\mathcal{N}^{\cdot}) \longrightarrow \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{N}^{l+1} \to \cdots$$

が $\mathcal{H}^l(\mathcal{N}^{\cdot})$ の脆弱分解を与えていることに注意すれば，$k-l \geqq 2$ に対しては

$$R^{k-l}g_*\mathcal{H}^l(\mathcal{N}^{\cdot})=\mathcal{H}^k(g_*\mathcal{N}^{\cdot})$$

が成り立つことが判る．$k=l+1$ の時は $\mathrm{Im}(g_*\mathcal{Z} \to g_*\mathcal{N}^{l+1})=\mathrm{Im}(g_*\mathcal{N}^l \to g_*\mathcal{N}^{l+1})$ であるから同様である．最後に $k=l$ の場合には，$0 \to g_*\mathcal{H}^l(\mathcal{N}^{\cdot}) \to g_*\mathcal{Z} \to g_*\mathcal{N}^{l+1}$ が完全系列であることを用いれば

$$R^0g_*\mathcal{D}ist_f^l(\mathcal{F})=g_*\mathcal{H}^l(\mathcal{N}^{\cdot})=\mathrm{Ker}(g_*\mathcal{Z} \longrightarrow g_*\mathcal{N}^{l+1})=\frac{\mathrm{Ker}(g_*\mathcal{N}^l \to g_*\mathcal{N}^{l+1})}{\mathrm{Im}(g_*\mathcal{N}^{l-1} \to g_*\mathcal{N}^l)}=$$
$$=\mathcal{H}^l(g_*\mathcal{N}^{\cdot})$$

となるから求める結果が得られる．　（証終）

命題 2.3.11. X，Y，Y' を位相空間，$\mathcal{F}$ を X 上の層，$f: X \to Y$，$g: Y' \to Y$，$f': X' \underset{\mathrm{def}}{=} X \underset{Y}{\times} Y' \to Y'$ および $g': X' \to X$ はいずれも連続写像であって右図を可換ならしむるものとする．更に f, f' は閉写像であり，又，X および X' のすべての開部分集合がパラコンパクトであると仮定する．この時

（図 2.3.2）
$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\ g'\ } & X'=X\underset{Y}{\times}Y' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ Y & \xleftarrow[\ g\ ]{} & Y' \end{array}$$

$$R^kf_*'g'^{-1}\mathcal{F}=g^{-1}R^kf_*\mathcal{F}$$

が成立する．

注意．考えている位相空間がすべてハウスドルフであり，f が固有写像（従って f' も固有写像となる），という条件でも上の命題は成立する．

［証明］　命題 2.1.4 の系により

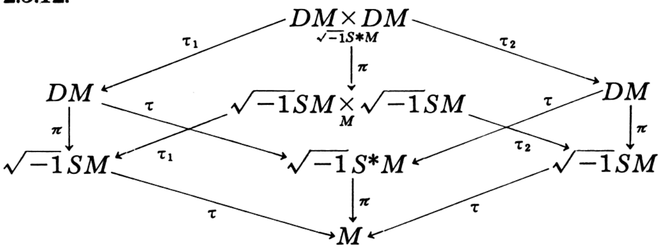
$$(R^kf_*'g'^{-1}\mathcal{F})_{y'}=H^k(f'^{-1}(y'),\ g'^{-1}\mathcal{F}|_{f'^{-1}(y')})$$

が成立する．他方 $y=g(y')$ とおけば g' は $f'^{-1}(y')$ と $f^{-1}(y)$ の間の全単射を与えるから

$$H^k(f'^{-1}(y'),\ g'^{-1}\mathcal{F}|_{f^{-1}(y')})=H^k(f^{-1}(y),\ \mathcal{F}|_{f^{-1}(y)})=(R^kf_*\mathcal{F})_y=(g^{-1}R^kf_*\mathcal{F})_{y'}$$

となり求める結果が得られる．　（証終）

命題 2.3.12.



なる可換図式を考える*)．$\mathscr{F}$ を $\sqrt{-1}SM$ 上の層とする時，次の事実が成立する．

(1)　$0 \longrightarrow \tau^{-1}R^{n-2}\tau_*\mathscr{F} \longrightarrow R^{n-2}(\pi\circ\tau_2)_*\,(\tau_1^{-1}\pi^{-1}\mathscr{F}) \longrightarrow \mathscr{F}^a \otimes \omega \longrightarrow$
$$\longrightarrow \tau^{-1}R^{n-1}\tau_*\mathscr{F} \longrightarrow R^{n-1}(\pi\circ\tau_2)_*\,(\tau_1^{-1}\pi^{-1}\mathscr{F}) \to 0$$

は $\sqrt{-1}SM$ 上の完全系列である．

(2)　$\tau^{-1}R^k\tau_*\mathscr{F} = R^k(\pi\circ\tau_2)_*(\tau_1{}^{-1}\pi^{-1}\mathscr{F})$　$(k \neq n-1, n-2)$

［証明］　$\sqrt{-1}SM \underset{M}{\times} \sqrt{-1}SM$ 上の層 $\tau_1^{-1}\mathscr{F}$ に命題 2.3.9 と命題 2.3.10 とを適用すれば，

$$\cdots \to R^{k-n+1}\tau_{2*}(\tau_1^{-1}\mathscr{F}\big|_{\triangle^a_{\sqrt{-1}SM}} \otimes \omega) \longrightarrow R^k\tau_{2*}\tau_1{}^{-1}\mathscr{F} \longrightarrow R^k(\tau_2\circ\pi)_*(\pi^{-1}\tau_1^{-1}\mathscr{F}) \to \cdots$$

なる完全系列を得る．この各項を計算しよう．

$\tau_i\big|_{\triangle^a_{\sqrt{-1}SM}}(i=1,2)$ は $\sqrt{-1}SM$ への写像として同相写像であり，しかも，$\tau_2\circ\tau_1^{-1}$ は $\sqrt{-1}SM$ の対蹠点写像 a（即ち $a(x+\sqrt{-1}v0)=x-\sqrt{-1}v0$）になっている．従って

$$R^{k-n+1}\tau_{2*}(\tau_1^{-1}\mathscr{F}\big|_{\triangle^a_{\sqrt{-1}SM}} \otimes \omega) = R^{k-n+1}\tau_{2*}(\tau_1^{-1}\mathscr{F}\big|_{\triangle^a_{\sqrt{-1}SM}}) \otimes \omega =$$
$$= \begin{cases} 0 & (k \neq n-1) \\ \mathscr{F}^a \otimes \omega & (k = n-1) \end{cases}$$

が成り立つ．但しここで $\mathscr{F}^a \underset{\text{def}}{=} a_*\mathscr{F} = a^{-1}\mathscr{F}$ である．

次に可換図式

---

*)　図式中の τ, π はすべて $\tau\colon \sqrt{-1}SM \to M$ および $\pi\colon \sqrt{-1}S^*M \to M$ より自然に定義されるものである．τ_1, τ_2 は各々第一成分，第二成分への射影を表わす．

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{-1}SM & \xrightarrow{\tau_1} & \sqrt{-1}SM \underset{M}{\times} \sqrt{-1}SM \\ \tau \downarrow & & \downarrow \tau_2 \\ M & \xrightarrow{\tau} & \sqrt{-1}SM \end{array}$$

に対して命題 2.3.11 を適用すれば

$$R^k\tau_{2*}\tau_1^{-1}\mathscr{F}=\tau^{-1}R^k\tau_*\mathscr{F}$$

を得る．他方，命題の陳述中の図式の可換性により

$$R^k(\tau_2\circ\pi)_*(\pi^{-1}\tau_1^{-1}\mathscr{F})=R^k(\pi\circ\tau_2)_*(\tau_1^{-1}\pi^{-1}\mathscr{F})$$

が成り立つから，以上により求める結果が得られた． (証終)

命題 2.3.13. $\sqrt{-1}SM$ 上で次の事実が成立する．

(1) $0\longrightarrow\mathscr{Q}\longrightarrow\tau^{-1}\pi_*\mathscr{C}\longrightarrow\pi_*\tau^{-1}\mathscr{C}\longrightarrow 0$

は完全系列である．

(2) $k\neq 0$ ならば

$$R^k\pi_*\tau^{-1}\mathscr{C}=0$$

が成立する．

［証明］ 命題 2.3.12 において $\mathscr{F}=\mathscr{Q}(=\mathscr{H}^1_{\sqrt{-1}SM}(\tau^{-1}\mathscr{O}_X))$ と置こう．まず $R^k(\pi\circ\tau_2)_*$ $(\tau_1^{-1}\pi^{-1}\mathscr{Q})$ を計算しよう．次の図式

$$\begin{array}{ccc} DM & \xrightarrow{\tau_1} & DM \underset{\sqrt{-1}S^*M}{\times} DM \\ \tau \downarrow & \circlearrowright & \downarrow \tau_2 \\ \sqrt{-1}S^*M & \xrightarrow[\tau]{} & DM \end{array}$$

と DM 上の層 $\pi^{-1}\mathscr{Q}$ に命題 2.3.11 を適用すれば，命題 2.1.2′ により

$$R^k\tau_{2*}(\tau_1^{-1}\pi^{-1}\mathscr{Q})=\tau^{-1}R^k\tau_*\pi^{-1}\mathscr{Q}=\begin{cases}0 & (k\neq n-1)\\ \tau^{-1}\mathscr{C}^a\otimes\omega & (k=n-1)\end{cases}$$

を得る．従って命題 2.3.8 の証明中の補題により

$$R^k(\pi\circ\tau_2)_*(\tau_1^{-1}\pi^{-1}\mathscr{Q})=R^{k-n+1}\pi_*R^{n-1}\tau_{2*}\tau_1^{-1}\pi^{-1}\mathscr{Q}=R^{k-n+1}\pi_*\tau^{-1}\mathscr{C}^a\otimes\omega$$

を得る．特に

$$R^{n-2}(\pi\circ\tau_2)_*(\tau_1^{-1}\pi^{-1}\mathscr{Q})=0$$

および

$$R^{n-1}(\pi\circ\tau_2)_*(\tau_1^{-1}\pi^{-1}\mathscr{Q})=\pi_*\tau^{-1}\mathscr{C}^a\otimes\omega$$

を得る．他方，命題 2.3.8 より

$$\tau^{-1}R^k\tau_*\mathcal{Q}=\begin{cases}0 & (k\neq n-1)\\ \tau^{-1}\pi_*\mathcal{C}^a\otimes\omega & (k=n-1)\end{cases}$$

を得る．従って命題 2.3.12 の(1)により

$$0\longrightarrow\mathcal{Q}^a\otimes\omega\longrightarrow\tau^{-1}\pi_*\mathcal{C}^a\otimes\omega\longrightarrow\pi_*\tau^{-1}\mathcal{C}^a\otimes\omega\longrightarrow 0$$

を得る．従って $\omega\otimes\omega\cong\boldsymbol{Z}_M$ 故，(1)を得る．

また，命題 2.3.12 の(2)により $k\neq n-1, n-2$ ならば

$$\tau^{-1}R^k\tau_*\mathcal{Q}=R^k(\pi\circ\tau_2)_*(\tau_1^{-1}\pi^{-1}\mathcal{Q})=R^{k-n+1}\pi_*\tau^{-1}\mathcal{C}^a\otimes\omega$$

であるから命題 2.3.8 を再び用いて(2)を得る．　(証終)

命題 2.3.14.　$\sqrt{-1}SM$ 上の層 $\tilde{\mathcal{A}}$ および $\tau^{-1}\mathcal{B}$ に対して規準的な射 $b:\tilde{\mathcal{A}}\to\tau^{-1}\mathcal{B}$ が存在する．

［証明］　命題 2.3.12 の(1)において $\mathcal{F}=\tilde{\mathcal{A}}$ とおけば，$\tilde{\mathcal{A}}^a\otimes\omega\to\tau^{-1}R^{n-1}\tau_*\tilde{\mathcal{A}}$ なる射が得られる．以下，定義 2.1.2 と同じ記号を用いる(右図参照)．まず，$R^k\tilde{\varepsilon}_*(\mathcal{O}_X|_{X-M})=0$ $(k\neq 0)$ であったから

$$\begin{array}{ccc}\widetilde{{}^MX} & \xleftarrow{\ \tilde{\varepsilon}\ } & \widetilde{{}^MX}-\sqrt{-1}SM\\ \tau\downarrow & \circlearrowright & \|\\ X & \xleftarrow[\ \varepsilon\ ]{} & X-M\end{array}$$

$$R^{n-1}\tau_*\tilde{\mathcal{A}}=R^{n-1}\tau_*(\tilde{\varepsilon}_*\mathcal{O}_X|_{X-M})=R^{n-1}(\tau\circ\tilde{\varepsilon})_*(\mathcal{O}_X|_{X-M})=R^{n-1}\varepsilon_*(\mathcal{O}_X|_{X-M})$$

を得る．一方，

$$\cdots\to H^{n-1}(U,\mathcal{O}_X)\longrightarrow H^{n-1}(U-M,\mathcal{O}_X)\longrightarrow H^n_{U\cap M}(U,\mathcal{O}_X)\longrightarrow H^n(U,\mathcal{O}_X)\to\cdots$$

なる完全系列において各項の帰納的極限をとることによって，$R^{n-1}\varepsilon_*(\mathcal{O}_X|_{X-M})\to\mathcal{H}^n_M(\mathcal{O}_X)$ なる規準的な射が存在することが判る．しかもこれは $n>1$ の時には同型になる．ここで $\tau^{-1}R^{n-1}\tau_*\tilde{\mathcal{A}}=\tau^{-1}R^{n-1}\varepsilon_*(\mathcal{O}_X|_{X-M})$ に注意すれば，上の二つの射を合成して，結局

$$\tilde{\mathcal{A}}^a\otimes\omega\longrightarrow\tau^{-1}\mathcal{H}^n_M(\mathcal{O}_X)$$

なる射が規準的に定義されたことになる．従って ${}^a\otimes\omega$ なる函手(functor)を作用させて

$$b:\tilde{\mathcal{A}}\longrightarrow\tau^{-1}\mathcal{B}$$

なる射を規準的に得ることができる．　(証終)

注意.　命題 2.3.14 は“**‘正則函数の境界値’**として超函数が得られる”と云う陳述の数学的表現である．以下，本書において“正則函数の境界値”と云う表現を用いるときは必ずこの意味に用いる．蛇足ながら，境界“値”とは謂うけれど，必ずしも(複素数)値が確定する訳ではないことを注意しておく．

定理 2.3.3.　　$0\longrightarrow\tilde{\mathscr{A}}\overset{b}{\longrightarrow}\tau^{-1}\mathscr{B}\longrightarrow\pi_*\tau^{-1}\mathscr{C}\longrightarrow 0$

は $\sqrt{-1}SM$ 上の完全系列である．

［証明］ 次のような可換図式を考えよう．

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \tau^{-1}\mathscr{A} & = & \tau^{-1}\mathscr{A} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \tilde{\mathscr{A}} & \overset{b}{\longrightarrow} & \tau^{-1}\mathscr{B} & \longrightarrow & \pi_*\tau^{-1}\mathscr{C} & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\mathcal{Q} & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & \tau^{-1}\pi_*\mathscr{C} & \longrightarrow & \pi_*\tau^{-1}\mathscr{C} & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

この可換図式に命題 2.1.2，定理 2.3.2 および命題 2.3.13 を適用すれば，縦 3 列と第 1，第 3 行が完全系列であることが判る．しかも第 3 列の特殊性によりこの場合は第 2 行が複体をなしている．よって，Nine lemma（第 1 章命題 1.1.4 系）を用いれば第 2 行も完全系列をなすことが判る．　　　　（証終）

この定理を用いて，超函数の特異性スペクトルと，その超函数を境界値とする正則函数との関係を調べよう（後述の定理 2.3.4 を目標とする）．

定義 2.3.4.　$\sqrt{-1}SM$ の部分集合 Z に対して，Z が凸であるとは $\tau:\sqrt{-1}SM\to M$ に関する各ファイバー $\tau^{-1}(x)\cap Z$ が凸であることを謂う*)．

また，各ファイバー $\tau^{-1}(x)\cap Z$ が**固有的に凸** (properly convex) である時に Z は固有的に凸であると謂う**)．

同様に，$\sqrt{-1}S^*M$ の部分集合に対しても（固有的）凸性を定義する．

又，Z を含む最小の凸集合（その存在は，Z を含む凸集合全体の共通部分を考えることによって保証される）を Z の**凸包** (convex hull) と呼ぶ．

定義 2.3.5.　$Z(\subset\sqrt{-1}SM)$ に対してその**極集合** (polar set) $Z^\circ(\subset\sqrt{-1}S^*M)$ を $Z^\circ=\{(x,\sqrt{-1}\xi_x\infty)\in\sqrt{-1}S^*M\mid Z$ の任意の点 $x+\sqrt{-1}v_x0$ に対し，$\langle\xi_x,v_x\rangle>0\}$ により定義する．同様にして $\sqrt{-1}S^*M$ の部分集合 Z に対し

---

*)　球面 S^{n-1} の真部分集合 A が凸である，とは $S^{n-1}\cong\boldsymbol{R}^n-\{0\}/\boldsymbol{R}^\times_+$ と考えて，$\varpi:\boldsymbol{R}^n-\{0\}\to S^{n-1}$ なる射影 ϖ による A の逆像 $(\subset\boldsymbol{R}^n-\{0\})$ が凸であることを謂う．S^{n-1} 自身は凸と規約する．

**)　S^{n-1} の凸部分集合 A が固有的に凸であるとは，$\varpi:\boldsymbol{R}^n-\{0\}\to S^{n-1}$ による A の逆像が全直線 $(\cong\boldsymbol{R})$ を含まないことを謂う．“A が固有的に凸である” と言う代わりに，“A は直線を含まない凸集合である” と言うこともある．

てもその極集合 Z° が定義される.

注意. Z° は常に凸である. 又, $\sqrt{-1}SM$ の開凸集合 U に対して $U^\circ(\subset \sqrt{-1}S^*M)$ を対応させる対応は単射的であり, 更に $\sqrt{-1}S^*M$ の任意の閉凸集合 Z は適当な開凸集合 $U(\subset\sqrt{-1}SM)$ により U° と表わすことができる. 又, $U^{\circ\circ}$ は U の凸包である.

また, $\sqrt{-1}SM$ 又は $\sqrt{-1}S^*M$ の凸部分集合 A の極集合が空でない為の必要十分条件は A が固有的に凸であることである.

定理 2.3.4. U を $\sqrt{-1}SM$ の開集合とする. 各 $x\in M$ に対して $U\cap\tau^{-1}(x)$ は空でない連結集合であると仮定しよう. その時 $V=U^{\circ\circ}$ と置くと次の事実が成立する.

(1)　$\Gamma(V,\tilde{\mathscr{A}})\to\Gamma(U,\tilde{\mathscr{A}})$ なる制限写像は全単射である.

(2)　$0\longrightarrow\tilde{\mathscr{A}}(U)\xrightarrow{\ b\ }\mathcal{B}(M)\xrightarrow{\ \mathrm{sp}\ }\mathcal{C}(\sqrt{-1}S^*M-U^\circ)$

は完全系列である. 換言すれば, $\varphi\in\Gamma(U,\tilde{\mathscr{A}})$ とすれば $\mathrm{S.S.}b(\varphi)\subset U^\circ$ が成立し, 逆に $u\in\mathcal{B}(M)$ が $\mathrm{S.S.}u\subset U^\circ$ を満たすならば $\varphi\in\Gamma(U,\tilde{\mathscr{A}})$ であって $u=b(\varphi)$ となるものが唯一つ存在する.

[証明]　前定理により $0\to\tilde{\mathscr{A}}\to\tau^{-1}\mathcal{B}\to\pi_*\tau^{-1}\mathcal{C}\to0$ は完全系列であるから, 次の可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccccccc}
0\longrightarrow & \tilde{\mathscr{A}}(V) & \longrightarrow & \tau^{-1}\mathcal{B}(V) & \longrightarrow & \pi_*\tau^{-1}\mathcal{C}(V) \\
 & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\
0\longrightarrow & \tilde{\mathscr{A}}(V) & \longrightarrow & \tau^{-1}\mathcal{B}(U) & \longrightarrow & \pi_*\tau^{-1}\mathcal{C}(U)
\end{array}$$

さて $\tau|_U$ および $\tau|_V$ はいずれも仮定より全射的開写像であり, そのファイバーは連結である. 従って命題 2.1.3 の (2) により

$$\tau^{-1}\mathcal{B}(V)=\tau^{-1}\mathcal{B}(U)=\mathcal{B}(M)$$

を得る. よって上の図式は

$$\begin{array}{ccccccc}
0\longrightarrow & \tilde{\mathscr{A}}(V) & \longrightarrow & \mathcal{B}(M) & \longrightarrow & \pi_*\tau^{-1}\mathcal{C}(V) \\
 & \downarrow & & \| & & \downarrow \\
0\longrightarrow & \tilde{\mathscr{A}}(U) & \longrightarrow & \mathcal{B}(M) & \longrightarrow & \pi_*\tau^{-1}\mathcal{C}(U)
\end{array}$$

と書き変えられる. 従って $\tilde{\mathscr{A}}(V)\to\tilde{\mathscr{A}}(U)$ なる制限写像は単射的であることが判った. これが全射的であることを示すには, $\pi_*\tau^{-1}\mathcal{C}(V)\to\pi_*\tau^{-1}\mathcal{C}(U)$ が単射的になることを示せば十分であることは容易に確かめ得る. さて,

$$\tau:\pi^{-1}V\longrightarrow\tau\pi^{-1}V=\sqrt{-1}S^*M-V^0=\sqrt{-1}S^*M-U^\circ$$

は全射的開写像であり，又各ファイバーは連結であるから，命題 2.1.3 の(2)を用いて

$$\pi_*\tau^{-1}\mathscr{C}(V)=(\tau^{-1}\mathscr{C})(\pi^{-1}V)=\mathscr{C}(\tau\pi^{-1}V)=\mathscr{C}(\sqrt{-1}S^*M-U^\circ)$$

を得る．一方，$\tau: \pi^{-1}U\to\sqrt{-1}S^*M-U^\circ$ は全射的であるから

$$\mathscr{C}(\sqrt{-1}S^*M-U^\circ)\longrightarrow(\tau^{-1}\mathscr{C})(\pi^{-1}U)=\pi_*\tau^{-1}\mathscr{C}(U)$$

は明らかに単射的である．よって(1)が証明され，同時に

$$0\longrightarrow\tilde{\mathscr{A}}(U)\longrightarrow\mathscr{B}(M)\longrightarrow\mathscr{C}(\sqrt{-1}S^*M-U^\circ)$$

なる完全系列も得られた． (証終)

注意 1. $\tau: \sqrt{-1}SM\to M$ は smooth (即ち τ から惹き起こされる接空間の写像が全射的)故，局所的には射影であり，従って開写像である．よって定理の条件として各ファイバーが連結という形にすれば(即ち空集合も許すことにすれば) (2)の結論は

$$0\longrightarrow\tilde{\mathscr{A}}(U)\xrightarrow{\ b\ }\mathscr{B}(\tau(U))\xrightarrow{\ \mathrm{sp}\ }\mathscr{C}(\sqrt{-1}S^*M-U^\circ)$$

と変更される．

注意 2. ここでは証明しないが，$\sqrt{-1}SM$ の任意の凸開集合 V に対して

$$H^k(V,\tilde{\mathscr{A}})=0 \quad (k\neq 0)$$

が成り立つことが知られている．従って定理 2.3.4(1) と合わせると $\sqrt{-1}SM$ においては凸集合が，多変数函数論での Stein 多様体の役割を果たしていると言える．

定理 2.3.4 を実用上より使い易い形に書き直しておく為に次の定義を準備しよう．

定義 2.3.6. D を $X-M$ の開集合とする．$D\cup\sqrt{-1}SM$ が $x_0+\sqrt{-1}v0(\in\sqrt{-1}SM)$ (または $U(\subset\sqrt{-1}SM)$) の近傍になっている時，D を $x_0+\sqrt{-1}v0$ の(又は U の)**錐状近傍** (conoidal neighborhood) 又は楔形近傍と謂う．$\varphi\in\mathscr{O}_X(D)$ に対して φ の境界値を $b_D(\varphi)$ と記す．また，$U(\subset\sqrt{-1}SM)$ のファイバーが連結の時，$\varphi\in\tilde{\mathscr{A}}(U)$ の定義する超函数を $b_U(\varphi)$ と記す．なお，これ等を印刷の都合上 $b(\varphi;D)$, $b(\varphi;U)$ と記すこともある*)．

この定義と

---

*) 前後関係から誤解のおそれが無いときには，単に $b(\varphi)$ と略記することもある．

$$\tilde{\mathscr{A}}(U)=\varinjlim_{\substack{D\text{は}U\text{の錐}\\\text{状近傍の全}\\\text{体を走る}}}\mathscr{O}_X(D)$$

なる事実を用いれば，定理 2.3.4 を次のように言い換えることが出来る．

定理 2.3.5.　M を実解析的多様体，X をその複素化とする．D を $X-M$ の開集合，$U(\subset\sqrt{-1}SM)$ を各ファイバーが連結な開集合とする．D が U の錐状近傍ならば $f(z)\in\mathscr{O}_X(D)$ はその境界値として $\tau(U)$ 上の超函数 $f(x)\in\mathscr{B}_M(\tau(U))$ を一意的に定め，しかもその特異性スペクトル $\mathrm{S.S.}f(x)$ は U の極集合 U° に含まれる．逆に M 上の超函数 $u(x)$ の特異性スペクトル $\mathrm{S.S.}u(x)$ が $\sqrt{-1}S^*M$ の凸閉集合 Z に含まれるならば，その極集合 Z° の錐状近傍 D と，D での正則函数 $f(z)$ が存在して $u(x)=b_D(f(z))$ と表わせる．

この定理が前定理の言い換えであることは明らかであろう．

さて U が大きくなるほどその極集合 U° は小さくなるから，定理 2.3.5 は超函数がより大きな U からの境界値で表わされるに従ってその特異性スペクトルが小さくなることを意味している．特に $U(\subset\sqrt{-1}SM)$ の凸包が $\sqrt{-1}SM$ 全体になってしまうような U からの境界値として表わされる超函数は $n\neq1$ の時*)実解析函数である．実際その時 $U^\circ=(\sqrt{-1}SM)^\circ=\phi$ となり，定理から $\mathrm{S.S.}u=\phi$ を得るからである．

さて，命題 2.1.6 によれば

$$\pi^{-1}\mathscr{B}\xrightarrow{\mathrm{sp}}\mathscr{C}\longrightarrow0\quad(\text{完全})$$

であったから，$\sqrt{-1}S^*M$ 上の層 $\mathscr{A}^*$ を $\mathscr{A}^*=\mathrm{Ker}(\pi^{-1}\mathscr{B}\to\mathscr{C})$ で定義すれば

$$0\longrightarrow\mathscr{A}^*\longrightarrow\pi^{-1}\mathscr{B}\xrightarrow{\mathrm{sp}}\mathscr{C}\longrightarrow0$$

なる完全系列を得る．定義により，明らかに $\mathscr{A}^*_{(x,\sqrt{-1}\xi\infty)}$ の元 u は

$$u=\sum_j b(\varphi_j),\quad\text{但し}\ \varphi_j\in\Gamma(U_j,\tilde{\mathscr{A}})\ \text{かつ}\ (x,\sqrt{-1}\xi\infty)\notin U_j{}^\circ$$

と表わすことができる．

この時，u は $(x,\sqrt{-1}\xi\infty)$ で **micro-analytic** である，と謂う．

§4.　いくつかの例

本節では混同の恐れの無い場合には虚数単位 $\sqrt{-1}$ を i と略記する．又，

*)　$n=1$ の時はファイバーは連結ではあり得ない．

$\varphi(z)\in\tilde{\mathcal{A}}_{x+iv0}$ に対して $b(\varphi(z))$ を $\varphi(x+iv0)$ と記す.

例 2.4.1.

$$\mathrm{S.S.}(x+i0)^\lambda=\begin{cases}\{(0,idx\infty)\}, & \lambda\neq 0,1,\cdots\\ \phi & ,\ \lambda=0,1,2,\cdots\end{cases}$$

実際, $x\neq 0$ なら $(x+i0)^\lambda$ は実解析的故, $x=0$ のファイバーのみ調べればよい. $\lambda=0,1,2,\cdots$ なら $x=0$ のところでも実解析的故, S.S.$(x+i0)^\lambda$ は空である. λ が 0 でも正の整数でもなければ $x=0$ で $(x+i0)^\lambda$ は実解析的ではないから, その特異性スペクトルは $\{(0,idx\infty),\ (0,-idx\infty)\}$ に含まれ, しかも空ではない. しかるに前節の定理 2.3.4 により $(0,-idx\infty)$ は S.S.$(x+i0)^\lambda$ に含まれていないから, 結局 S.S.$(x+i0)^\lambda=\{(0,idx\infty)\}$ となる.

さて $(x+i0)^\lambda$ は microfunction と考えれば (即ち $\mathrm{sp}(x+i0)^\lambda$ を考えれば) $\lambda=0,1,\cdots$ で零を持ち, それは一位の零である[*]. 実際, x^n は microfunction としては 0 であるから,

$$\lim_{\lambda\to n}\frac{(x+i0)^\lambda}{\lambda-n}=\lim_{\lambda\to n}\frac{(x+i0)^\lambda-x^n}{\lambda-n}=\frac{d}{d\lambda}(x+i0)^\lambda\Big|_{\lambda=n}=(x+i0)^\lambda\log(x+i0)\Big|_{\lambda=n}=$$
$$=(x+i0)^n\log(x+i0)=x^n\log(x+i0)$$

これは $z^n\log z$ の上半面からの境界値であるが $z=0$ を通って解析接続はできないので microfunction としては零でない. 即ち $(x+i0)^\lambda$ は $\lambda=n(\in\boldsymbol{Z}_+)$ で一位の零を持つ. 一方, ガンマ函数 $\Gamma(-\lambda)$ は決して零にならず, しかも $\lambda=n$ $(\in\boldsymbol{Z}_+)$ で一位の極 (pole) を持つから $\Gamma(-\lambda)(x+i0)^\lambda$ は任意の λ に対して microfunction として零でない. 従って

$$\mathrm{S.S.}\Gamma(-\lambda)(x+i0)^\lambda=\{(0,idx\infty)\}$$

が任意の λ について成り立つ. 又, $\Gamma(-\lambda)(x+i0)^\lambda$ の $\lambda=n(\in\boldsymbol{Z}_+)$ における値[†]は

$$\Gamma(-\lambda)(x+i0)^\lambda\Big|_{\lambda=n}=\frac{(x+i0)^\lambda}{\lambda-n}\Big|_{\lambda=n}(\lambda-n)\Gamma(-\lambda)\Big|_{\lambda=n}=\frac{(-1)^{n-1}}{n!}x^n\log(x+i0)$$

となる.

例 2.4.2. $\mathrm{Re}\lambda>0$ ならば

---

*) 正則なパラメタに依存する超函数および microfunction の理論の詳細については第3章第8節を参照.

†) 次頁脚註.

$$x_+^\lambda \underset{\text{def}}{=} \begin{cases} x^\lambda & (x>0) \\ 0 & (x<0) \end{cases} \tag{2.4.1}$$

は連続函数として well-defined である．従って超函数として well-defined である*)．これをより直接的に“正則函数の境界値”として表わすことを以下に試みよう．実際，λ を整数でないとして

$$\begin{aligned} x_+^\lambda &\underset{\text{def}}{=} \frac{1}{e^{-\pi i\lambda}-e^{\pi i\lambda}}\{e^{-\pi i\lambda}(x+i0)^\lambda - e^{\pi i\lambda}(x-i0)^\lambda\} \\ &= \frac{1}{-2i\sin\pi\lambda}\{e^{-\pi i\lambda}(x+i0)^\lambda - e^{\pi i\lambda}(x-i0)^\lambda\} \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

と定義すれば(例 2.4.1 により，$\sin\pi\lambda \neq 0$ であれば右辺は常に well-defined であることに注意)，$\mathrm{Re}\lambda>0$ ならば(2.4.2)で与えられた超函数は(2.4.1)で定義された連続函数に一致する．実際，$x>0$ に対しては $(x+i0)^\lambda=(x-i0)^\lambda=x^\lambda$ 故，確かに x^λ になっており，又 $x<0$ ならば $(x+i0)^\lambda=|x|^\lambda e^{\pi i\lambda}$, $(x-i0)^\lambda=$ $=|x|^\lambda e^{-\pi i\lambda}$ であるから $e^{-\pi i\lambda}(x+i0)-e^{\pi i\lambda}(x-i0)=|x|^\lambda-|x|^\lambda=0$ となっているからである．従って(2.4.2)によって超函数 x_+^λ を定義するものとしよう．上では λ は整数でないとしたが，実は(2.4.2)の右辺で定義される超函数は次の性質を持つ：

$\lambda=0, 1, 2\cdots$ の時は wel-defined.

$\lambda=-1, -2, \cdots$ の時は その点で一位の極を持つ.

実際，$\lambda=n\geqq 0$ の時

$$e^{-\pi in}(x+i0)^n - e^{\pi in}(x-i0)^n = (-1)^n(x^n-x^n)=0$$

であり，一方，$1/\sin\pi\lambda$ は $\lambda=n$ で一位の極を持つのみであるから，(2.4.2)の右辺は $\lambda=n$ でも well-defined である**)．他方，$\lambda=-n<0$ の時には

$$(e^{-\pi i\lambda}(x+i0)^\lambda - e^{\pi i\lambda}(x-i0)^\lambda|_{\lambda=-n} = (-1)^n\left\{\frac{1}{(x+i0)^n}-\frac{1}{(x-i0)^n}\right\} \neq 0$$

であるから一位の極を持つことになる．

---

†) $\Gamma(-\lambda)(x+i0)^\lambda$ は λ について正則であるから $\lambda=n$ に制限できる．その結果得られる一変数の超函数または microfunction のことをこのように呼ぶ.

*) 本書では触れなかったが，連続函数，或いはより一般に distribution は超函数になる．証明については，例えば，序で触れた小松先生の議義録第Ⅵ章 §2-2 参照.

**) 厳密に言えば第 3 章 §8 の理論を必要とするが，ここでは以下の具体的計算により $x_+^\lambda|_{\lambda=n}$ が well-defined になっている，と言ってもよい.

さて上述のように x_+^λ は $\lambda=0,1,\cdots$ で超函数を自然に定義するが，特に $\lambda=0$ の時このようにして定義される超函数を**ヘビサイド** (Heaviside) **函数**といい $Y(x)$*) と記す．即ち，

$$Y(x)=x_+^\lambda\Big|_{\lambda=0}=\begin{cases}1 & (x>0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

であり，更にこの時

$$Y(x)=\frac{-2\pi i+\log(x+i0)-\log(x-i0)}{-2\pi i}$$

が成立する．但し $\log(1+i0)=\log(1-i0)=0$ となる log の分技をとる．実際

$$x_+^\lambda=\frac{e^{-\pi i\lambda}(x+i0)^\lambda-e^{\pi i\lambda}(x-i0)^\lambda}{-2i\sin\pi\lambda}$$

であり，ここで

$$\frac{e^{-\pi i\lambda}[(x+i0)^\lambda-1]}{-2i\sin\pi\lambda}\Big|_{\lambda=0}=\frac{e^{-\pi i\lambda}\lambda}{-2i\sin\pi\lambda}\cdot\frac{[(x+i0)^\lambda-1]}{\lambda}\Big|_{\lambda=0}=\frac{1}{-2\pi i}\log(x+i0)$$

である．他の項も同様である．即ち，超函数として

$$x_+^\lambda\Big|_{\lambda=0}=\frac{-2\pi i+\log(x+i0)-\log(x-i0)}{-2\pi i}$$

が成立する．同様にして

$$Y(x)=\frac{\log(-x+i0)-\log(-x-i0)}{2\pi i}$$

でもある．実際 $x>0$ ならば $\log(-x+i0)=\log x+\pi i$, $\log(-x-i0)=\log x-\pi i$ 故，右辺$=1$ になり，$x<0$ ならば $\log(-x+i0)=\log(-x-i0)=\log(-x)$ であるから右辺$=0$ になる．

なお，$x_+^\lambda\Big|_{\lambda=n}=x^n\cdot x_+^{\lambda-n}\Big|_{\lambda=n}=x^nY(x)$ が成り立つことにも注意しておこう．

次に λ が負の整数である時に，x_+^λ の構造を調べる為に，$\lambda=-1,-2,\cdots$ で一位の零点を持つ $\dfrac{1}{\Gamma(1+\lambda)}$ をかけて得られる $\dfrac{x_+^\lambda}{\Gamma(1+\lambda)}$ の構造を調べよう．

$\Gamma(1+\lambda)\Gamma(-\lambda)=\dfrac{\pi}{-\sin\pi\lambda}$ と云う函数等式を用いれば

$$\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(1+\lambda)}\Big|_{\lambda=-n}=\frac{e^{-\pi i\lambda}(x+i0)^\lambda-e^{\pi i\lambda}(x-i0)^\lambda}{-2i\sin\pi\lambda\cdot\Gamma(1+\lambda)}\Big|_{\lambda=-n}$$
$$=\frac{\Gamma(-\lambda)}{2\pi i}\{e^{-\pi i\lambda}(x+i0)^\lambda-e^{\pi i\lambda}(x-i0)^\lambda\}\Big|_{\lambda=-n}$$

---

*) $\theta(x)$ と記す流儀もある．

$$=\frac{(-1)^n(n-1)!}{2\pi i}\left\{\frac{1}{(x+i0)^n}-\frac{1}{(x-i0)^n}\right\}=D_x^{n-1}\delta(x)$$

を得る．但しここで $\delta(x)$ は $\delta(x)=\dfrac{1}{2\pi i}\left(\dfrac{1}{x-i0}-\dfrac{1}{x+i0}\right)$ で定義される超函数で(Dirac の) δ-**函数**(デルタ函数)と呼ばれる．実際，$D_x x_+^\lambda=\lambda x_+^{\lambda-1}$ であるから，

$$D_x\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(1+\lambda)}=\frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$$

が成り立つ．他方，定義から

$$\delta(x)=\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(1+\lambda)}\bigg|_{\lambda=-1}$$

であるから

$$D_x\delta(x)=\frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\bigg|_{\lambda=-1}=\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(1+\lambda)}\bigg|_{\lambda=-2}$$

が得られる．以下同様にして

$$D_x^{n-1}\delta(x)=\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(1+\lambda)}\bigg|_{\lambda=-n}$$

を得る．

注意 1. $\mathrm{Supp}\,\delta(x)=\{x\in\boldsymbol{R}\mid x=0\}$

が成り立つ．従って δ-“函数”とは言うものの，(Dirichlet の意味での)函数(即ち，各点 x にある値を対応させる対応)ではないことに注意しておこう．実際，歴史的に見て，Dirac が量子力学において δ-函数を極めて有効に用いたことが，distribution の理論，延いては超函数の理論，の形成に大きな刺戟を与えたと言えよう．

注意 2. $\mathcal{D}$ を正則函数を係数とする微分作用素全体の作る層とすれば，$P\in\mathcal{D}$ は $P:\mathcal{O}_X\to\mathcal{O}_X$ なる準同型写像を与える．これは

$$\mathcal{B}_M=\mathcal{H}_M^n(\mathcal{O}_X)\otimes\omega_M\xrightarrow{P}\mathcal{H}_M^n(\mathcal{O}_X)\otimes\omega_M$$

なる準同型写像を惹き起こす．特に正則函数も掛け算作用素として $\mathcal{B}$ に作用する．例えば $x\delta(x)=0$ である．一般に，$u=\sum_j b(\varphi_j)\in\mathcal{B}$ に対して $Pu=\sum_j b(P\varphi_j)$ である．

以上に述べたことを改めて定義としてまとめておこう．

定義 2.4.1.

(1)　$x_+^\lambda = \frac{1}{-2i\sin\pi\lambda}\{e^{-\pi i\lambda}(x+i0)^\lambda - e^{\pi i\lambda}(x-i0)^\lambda\}$

(2)　(ヘビサイド函数)　$Y(x) = x_+^\lambda\Big|_{\lambda=0} = \frac{\log(-x+i0)-\log(-x-i0)}{2\pi i}$

(3)　(Dirac の δ 函数(一変数の場合))　$\delta(x) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x-i0} - \frac{1}{x+i0}\right)$

(4)　(多変数の δ 函数)　$\delta(x) = \delta(x_1, \cdots, x_n) \underset{\text{def}}{=} \delta(x_1)\cdots\delta(x_n) =$

$$= \frac{1}{(-2\pi i)^n}\sum_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n=\pm1}\frac{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}{(x_1+i\varepsilon_1 0)-(x_n+i\varepsilon_n 0)}$$

但しここで，$\frac{1}{(x_1+i\varepsilon 0)\cdots(x_n+i\varepsilon_n 0)}$ とは $\frac{1}{z_1 z_2\cdots z_n}$ の $\varepsilon_i \mathrm{Im} z_i > 0$ $(1\leqq i\leqq n)$の方向からの境界値を表わす.

注意.　$a(x)$ を実解析函数とすると $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$ である．即ち $x_1\delta(x) = \cdots = x_n\delta(x) = 0$ が成り立つ．実際，$x_1\delta(x) =$

$$= \frac{1}{(-2\pi i)^n}\sum_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n=\pm1}\frac{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}{(x_2+i\varepsilon_2 0)\cdots(x_n+i\varepsilon_n 0)} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n}\left[\sum_{\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n=\pm1}\frac{\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}{(x_2+i\varepsilon_2 0)\cdots(x_n+i\varepsilon_n 0)} - \sum_{\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n=\pm1}\frac{\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}{(x_2+i\varepsilon_2 0)\cdots(x_n+i\varepsilon_n 0)}\right] = 0.$$

命題 2.4.1.　$\delta(x)$ を $\boldsymbol{R}^n$ 上の δ-函数，$GL(n, \boldsymbol{R})$ を $\boldsymbol{R}^n$ に作用する n 次一般線型群とすれば次の事実が成立する.

(1)　$\delta(gx) = \frac{1}{|\det g|}\delta(x)$　$(x\in\boldsymbol{R}^n,\ g\in GL(n, \boldsymbol{R}))$

(2)　$\mathrm{S.S.}\,\delta(x) = \pi^{-1}(0) = \{(0, \sqrt{-1}\langle\xi, dx\rangle\infty)\mid \xi\in\boldsymbol{R}^n - \{0\}\}$*)

(3)　$$\delta(x) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{|\xi_0\wedge\cdots\wedge\xi_{k-1}\wedge\xi_{k+1}\wedge\cdots\wedge\xi_n|}{(\langle x, \xi_0\rangle + \sqrt{-1}\,0)\cdots(\langle x, \xi_{k-1}\rangle + \sqrt{-1}\,0)}\times$$
$$\times\frac{1}{(\langle x, \xi_{k+1}\rangle + \sqrt{-1}\,0)\cdots(\langle x, \xi_n\rangle + \sqrt{-1}\,0)}$$

但し，$\xi_0, \cdots, \xi_n$ はどの n 個も一次独立であり，しかも $\xi_0 + \cdots + \xi_n = 0$ を満たす $(n+1)$ 個のベクトルとする．又 $|\xi_1\wedge\cdots\wedge\xi_n| \underset{\text{def}}{=} |\det(\xi_1, \cdots, \xi_n)|$ とした.

注意 1.　(1) より $\delta(x)|dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n|$ は $GL(n, \boldsymbol{R})$ の作用で不変である．更に一般に F が 0 の近傍から 0 の近傍への実解析写像で $F(0)=0$，かつ $dF(0)$ が非退化ならば

$$\delta(F(x)) = \frac{1}{|\det dF(0)|}\delta(x)$$

*)　以下，しばしば S^{n-1} の点を表わすのにその代表元 $(\in\boldsymbol{R}^n - \{0\})$ を用いることがある.

が成り立つ．(第3章定理3.1.7参照． 一般に $f\colon M_1\to M_2$ なる実解析的同型があれば $\mathcal{B}_{M_2}\to\mathcal{B}_{M_1}$ が次のようにして惹き起こされる：$\mathcal{B}_{M_2}$ の元 $u(x_2)=\sum_j b(\varphi_j)$ に対して $u(f(x_1))=\sum_j b(\varphi_j(f(x_1)))$ により $\mathcal{B}_{M_1}$ の元を対応させる．)

注意 2. $\delta(x)$ は n 変数の超函数であるから，第1章で示したように，$(n+1)$ 個の正則函数の境界値の和として表わせる筈でそれを具体的に与えているのが命題 2.4.1 (3) である．

さて命題 2.4.1 の証明にかかろう．

［証明］ 先ず(1)を示そう．$GL(n,\boldsymbol{R})$ は対角行列と$\begin{pmatrix}1 & & & \\ & \ddots & \lambda & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}$なる形の元で生成されるから各々の場合に確かめればよい．

$$\delta(a_1x_1,\cdots,a_nx_n)=\frac{1}{(-2\pi i)^n}\sum_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n=\pm1}\frac{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}{(a_1x_1+i\varepsilon_10)\cdots(a_nx_n+i\varepsilon_n0)}$$

であり，$\dfrac{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}{(a_1x_1+i\varepsilon_10)\cdots(a_nx_n+i\varepsilon_n0)}$ は $\dfrac{1}{(a_1z_1)\cdots(a_nz_n)}$ を $\{\varepsilon_i\mathrm{Im}\,a_iz_i>0(1\leqq i\leqq n)\}$ に制限して考えてその境界値を取ったものである．これは $\dfrac{1}{a_1\cdots a_n}\cdot\dfrac{1}{z_1\cdots z_n}$ の $(\varepsilon_i\mathrm{sgn}\,a_i)\mathrm{Im}\,z_i>0$ $(1\leqq i\leqq n)$ からの境界値といってもよい．即ち，

$$\frac{1}{(a_1x_1+i\varepsilon_10)\cdots(a_nx_n+i\varepsilon_n0)}=\frac{1}{a_1\cdots a_n}\cdot\frac{1}{(x_1+i\varepsilon_1\mathrm{sgn}\,a_10)\cdots(x_n+i\varepsilon_n\mathrm{sgn}\,a_n0)}$$

が成り立つから，$\varepsilon_i'=\varepsilon_i\mathrm{sgn}\,a_i$ と置けば

$$\delta(a_1x_1,\cdots,a_nx_n)=\frac{1}{(-2\pi i)^n}\cdot\frac{(\mathrm{sgn}\,a_1)\cdots(\mathrm{sgn}\,a_n)}{a_1\cdots a_n}\sum_{\varepsilon_1',\cdots,\varepsilon_n'=\pm1}\frac{\varepsilon_1'\cdots\varepsilon_n'}{(x_1+i\varepsilon_1'0)\cdots(x_n+i\varepsilon_n'0)}=$$

$$=\left|\frac{1}{a_1\cdots a_n}\right|\delta(x)$$

となり，成り立っている．次に g が$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ & 1 & \\ 0 & & \ddots\ 1\end{pmatrix}$の場合について考えてみよう．この場合，

$$\delta(gx)=\delta(x_1+x_2,x_2,\cdots,x_n)=$$

$$=\frac{1}{(-2\pi i)^n}\sum_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n=\pm1}\frac{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}{(x_1+x_2+i\varepsilon_10)(x_2+i\varepsilon_20)\cdots(x_n+i\varepsilon_n0)}$$

であるから

$$\delta(x_1+x_2,x_2,\cdots,x_n)-\delta(x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{(-2\pi i)^n}\sum_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n=\pm1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{(x_1+x_2+i\varepsilon_10)(x_2+i\varepsilon_20)\cdots(x_n+i\varepsilon_n0)}-\frac{1}{(x_1+i\varepsilon_10)\cdots(x_n+i\varepsilon_n0)}\right\}$$

となる．各 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ について $\dfrac{1}{(x_1+x_2+i\varepsilon_10)(x_2+i\varepsilon_20)\cdots(x_n+i\varepsilon_n0)}-$

$\dfrac{1}{(x_1+i\varepsilon_1 0)\cdots(x_n+i\varepsilon_n 0)}$ の第一項は $\{\varepsilon_1 \mathrm{Im}(z_1+z_2)>0,\ \varepsilon_i \mathrm{Im} z_i>0(2\leqq i\leqq n)\}$ からの境界値であり，第二項は $\{\varepsilon_i \mathrm{Im} z_i>0\ (1\leqq i\leqq n)\}$ からの境界値である．従って，これはその共通部分 $\{\varepsilon_1 \mathrm{Im}(z_1+z_2)>0$ かつ $\varepsilon_i \mathrm{Im} z_i>0\ (1\leqq i\leqq n)\}$ からの $\dfrac{1}{(z_1+z_2)z_2\cdots z_n}-\dfrac{1}{z_1 z_2\cdots z_n}=\dfrac{-1}{(z_1+z_2)z_1 z_3\cdots z_n}$ の境界値である．そこでこれの $\{\varepsilon_1 \mathrm{Im}(z_1+z_2)>0,\ \varepsilon_1 \mathrm{Im} z_1>0,\ \varepsilon_i \mathrm{Im} z_i>0\ (3\leqq i\leqq n)\}$ からの境界値を $\dfrac{-1}{(x_1+x_2+i\varepsilon_1 0)(x_1+i\varepsilon_1 0)(x_3+i\varepsilon_3 0)\cdots(x_n+i\varepsilon_n 0)}$ と書くことにすれば，

$$\delta(x_1+x_2, x_2, \cdots, x_n)-\delta(x_1, \cdots, x_n)=$$

$$=\frac{1}{(-2\pi i)^n}\sum_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\pm 1}\frac{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}{(x_1+x_2+i\varepsilon_1 0)(x_1+i\varepsilon_1 0)(x_3+i\varepsilon_3 0)\cdots(x_n+i\varepsilon_n 0)}=0$$ を得る．

一般の $g=\begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots\lambda & \\ & & 1\end{pmatrix}$ についても全く同様である．

以上により (1) が証明された．

次に (2) を示そう．$x_1\delta(x)=\cdots=x_n\delta(x)=0$ であるから $\mathrm{Supp}\,\delta(x)=\{0\}$ である．従って $\delta(x)$ は解析的ではあり得ないから

$$\phi\neq \mathrm{S.S.}\delta(x)\subset\pi^{-1}(0)=\{(0, i\langle\xi, dx\rangle\infty \mid \xi\in \boldsymbol{R}^n-\{0\}\}$$

となる．よって $(0, i\langle\xi, dx\rangle\infty)\in \mathrm{S.S.}\delta(x)$ となる $\xi\in\boldsymbol{R}^n-\{0\}$ が存在する．従ってこの ξ に対して $(0, i\langle\xi, d(gx)\rangle\infty)=(0, i\langle{}^t g\xi, dx\rangle\infty)$ は $\mathrm{S.S.}\delta(gx)$ に含まれることになる．然るに (1) により $\mathrm{S.S.}\delta(gx)=\mathrm{S.S.}\delta(x)$ が成立するから $(0, i\langle{}^t g\xi, dx\rangle\infty)$ は $\mathrm{S.S.}\delta(x)$ に含まれる．他方 $GL(n, \boldsymbol{R})$ は $\boldsymbol{R}^n-\{0\}$ に推移的に作用するから，結局，$\mathrm{S.S.}\delta(x)=\pi^{-1}(0)$ を得る．

最後に (3) を証明しよう．此処では簡単の為 $n=2$ の場合を証明する．(一般の場合は各自試みられたい．)

$n=2$ ならば $\xi_0=(1, 0), \xi_1=(0, 1),\ \xi_2=(-1, -1)$ として一般性を失うことは無い．この時 (3) の右辺は

$$\frac{1}{(-2\pi i)^2}\left\{\frac{1}{(x_2+i0)(-x_1-x_2+i0)}+\frac{1}{(x_1+i0)(-x_1-x_2+i0)}+\frac{1}{(x_1+i0)(x_2+i0)}\right\}$$

となる．一方，定義により

$$\delta(x)=\frac{1}{(-2\pi i)^2}\left\{\frac{1}{(x_1+i0)(x_2+i0)}-\frac{1}{(x_1+i0)(x_2-i0)}-\frac{1}{(x_1-i0)(x_2+i0)}+\right.$$

$$+\frac{1}{(x_1-i0)(x_2-i0)}\Big\}$$

であるから

$$(-2\pi i)^2((3)\text{ の右辺}-\delta(x))=\Big(\frac{1}{(x_1-i0)(x_2+i0)}-\frac{1}{(x_1+x_2-i0)\ (x_2+i0)}\Big)+$$

$$+\Big(\frac{1}{(x_1+i0)(x_2-i0)}-\frac{1}{(x_1+x_2-i0)\ (x_1+i0)}\Big)-\frac{1}{(x_1-i0)(x_2-i0)}=$$

$$=\frac{1}{(x_1-i0)(x_1+x_2-i0)}+\frac{1}{(x_2-i0)(x_1+x_2-i0)}-\frac{1}{(x_1-i0)(x_2-i0)}=0$$

となる. (証終)

注意. 上のような計算では，二つの正則函数の和や差を作る時に，それらの定義されている領域の共通部分でのみ，そのような計算が許される，と云うことを忘れてはならない.

次の命題は具体的な例を考える時，しばしば有用である.

命題 2.4.2. M を実解析的多様体，X をその複素化とする. $f(x)$ を M 上の実数値実解析函数とする. その時 $df(x_0)\neq 0$ なる $x_0\in M$ と $\langle v_0, df(x_0)\rangle>0$ となる v_0 に対して，$\{z\in X\,|\,\mathrm{Im}f(z)>0\}\cup\sqrt{-1}SM$ は x_0+iv_00 の近傍である.

［証明］ $|x-x_0|\ll 1$, $|v-v_0|\ll 1$, $0<t\ll 1$ なる $z=x+itv$ に対して $\mathrm{Im}f(z)>0$ となることを示せば十分である. 然るに $f(x+itv)=f(x)+it\langle v, df(x)\rangle+O(t^2)$ であるから，t を十分小さくとれば $\mathrm{Im}f(x+itv)=t\langle v, df(x)\rangle+O(t^2)>0$ となる. (証終)

この補題に関係して次の例を考えてみよう.

例 2.4.3. $u(x)=((x_1+i0)^2-x_2^2-\cdots\cdots-x_n^2)^\lambda$ を考えよう. $z_j=x_j+\sqrt{-1}y_j$ と置く時 $y_1^2-y_2^2-\cdots-y_n^2>0$ ならば $z_1^2-z_2^2-\cdots-z_n^2\neq 0$ であることを見よう. 実際 $z_1^2-z_2^2-\cdots-z_n^2=[(x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2)-(y_1^2-y_2^2-\cdots-y_n^2)]+2i(x_1y_1-x_2y_2-\cdots-x_ny_n)$ であるから，もし $y_1^2-y_2^2-\cdots-y_n^2>0$ かつ $z_1^2-z_2^2-\cdots-z_n^2=0$ ならば $(x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2)>0$, かつ $(x_1y_1-x_2y_2-\cdots-x_ny_n)=0$ でなければならない. その時，$|x_1y_1|=|x_2y_2+\cdots+x_ny_n|\leqq\sqrt{x_2^2+\cdots+x_n^2}\times\sqrt{y_2^2+\cdots+y_n^2}<|x_1||y_1|$ となり矛盾である. 従って $z_1^2-z_2^2-\cdots-z_n^2\neq 0$ である. $D=\{(z_1,\cdots,z_n)\in C^n\,|\,z_j=x_j+\sqrt{-1}y_j$ として $y_1>0$, $y_1^2-y_2^2-\cdots-y_n^2$

$>0\}$ とおけば $D\cup \boldsymbol{R}^n\times\sqrt{-1}S^{n-1}$ ($\sqrt{-1}S\boldsymbol{R}^n\cong\boldsymbol{R}^n\times\sqrt{-1}S^{n-1}$ に注意)が $U \underset{\text{def}}{=} \{x+iv0\in\sqrt{-1}S\boldsymbol{R}^n \mid v=(v_1,\cdots,v_n)$ として $v_1>0,\ v_1{}^2-v_2{}^2-\cdots-v_n{}^2>0\}$ の近傍になっている．前述のことより $u(z)=(z_1{}^2-z_2{}^2-\cdots-z_n{}^2)^\lambda\in\mathcal{O}_{C^n}(D)$ であるから定理 2.3.5 により $u(x)$ は $\boldsymbol{R}^n$ 上の超函数として well-defined である．更にその特異性スペクトル S.S.u は U° に含まれる．即ち S.S.$u\subset\{(x,i<\xi,dx>\infty) \mid \xi_1{}^2-\xi_2{}^2-\cdots-\xi_n{}^2\geqq 0,\ \xi_1>0\}$．他方，$(x_1{}^2-x_2{}^2-\cdots-x_n{}^2)\neq 0$ ならば u は実解析的だから S.S.$u\subset\{x_1{}^2-x_2{}^2-\cdots-x_n{}^2=0\}$ でもある．さて，$x_1{}^2-x_2{}^2-\cdots-x_n{}^2=0$ なる条件のもとでは $x=(x_1,\cdots,x_n)\neq 0$ と $x_1\neq 0$ は同値であるから，これ以後の考察を $x_1>0,\ x=0,\ x_1<0$ の三つの場合に分けることにしよう．

$x_1>0$ の時 $x_1{}^2-x_2{}^2-\cdots-x_n{}^2=0,\ y_1{}^2-y_2{}^2-\cdots-y_n{}^2>0,\ y_1>0$ ならば $\mathrm{Im}(z_1{}^2-z_2{}^2-\cdots-z_n{}^2)>0$ である．即ち，$f(z)=(z_1{}^2-z_2{}^2-\cdots-z_n{}^2)$ と置けば $x_1>0$ の近傍では $u(z)=f(z)^\lambda$ が D を含む領域 $\{z \mid \mathrm{Im}\, f(z)>0\}$ にまで拡張される．命題 2.4.2. により $\{z \mid \mathrm{Im}\, f(z)>0\}$ は $U=\{x+iv0\in\sqrt{-1}S\boldsymbol{R}^n \mid x_1>0,\ <v,df(x)>>0\}$ の錐状近傍になっているから，$u(z)$ の境界値の定める超函数の特異性スペクトルは $U^\circ=\{(x,idf(x)\infty) \mid x_1>0\}$ に含まれる．即ち，$x_1>0$ ならば S.S.$u\subset\{(x,i(x_1,-x_2,\cdots,-x_n)\infty) \mid x_1{}^2-x_2{}^2-\cdots-x_n{}^2=0\}$ である．同様にして $x_1<0$ の時 S.S.$u\subset\{x,-i(x_1,-x_2,\cdots,-x_n)\infty \mid x_1{}^2-x_2{}^2-\cdots-x_n{}^2=0\}$ となるから，結局

$$\text{S.S.}u\subset\left\{(x,i\left(1,-\frac{x_2}{x_1},\cdots,-\frac{x_n}{x_1}\right)\infty \,\middle|\, x\neq 0,\quad x_1{}^2-x_2{}^2-\cdots-x_n{}^2=0\right\}\cup$$
$$\cup\left\{(0,i\xi\infty) \mid \xi_1{}^2-\xi_2{}^2-\cdots-\xi_n{}^2\geqq 0,\ \xi_1>0\right\}$$

を得る．

なお，原点のところでは $df(0)=0$ であるから命題 2.4.2 は適用できない．従って $\{z \mid \mathrm{Im}\, f(z)>0\}$ が錐状近傍にはなっているという保証はないことに注意しよう．なお $f\neq 0$ の時 $u=f^\lambda$ の値は次のようになっている．

$u(1,0,\cdots,0)=(f(1,0,\cdots,0))^\lambda=1$ なる分枝をとる．$x_1>0$ ならば

$$u(x)=(x_1{}^2-x_2{}^2-\cdots-x_n{}^2+i0)^\lambda$$
$$=\begin{cases}(x_1{}^2-x_2{}^2-\cdots-x_n{}^2)^\lambda & (x_1>\sqrt{x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2})\\ e^{\pi i\lambda}(x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2-x_1{}^2)^\lambda & (x_1{}^2<x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2)\end{cases}$$

但し $(x_1{}^2-x_2{}^2-\cdots-x_n{}^2+i0)^\lambda$ は $u(z)=(z_1{}^2-z_2{}^2-\cdots-z_n{}^2)^\lambda$ の $\mathrm{Im}\, f(z)= =\mathrm{Im}(z_1{}^2-z_2{}^2-\cdots-z_n{}^2)>0$ からの境界値と云う意味である．

同様にして $x_1<0$ の時は

$$u(x)=e^{\pi i\lambda}(x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2-x_1{}^2+i0)^\lambda$$
$$=\begin{cases} e^{\pi i\lambda}(x_1{}^2-x_2{}^2-\cdots-x_n{}^2)^\lambda & (x_1{}^2<x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2) \\ e^{2\pi i\lambda}(x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2-x_1{}^2)^\lambda & (x_1<-\sqrt{x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2}) \end{cases}$$

となる.

次に定義する正型なる概念は，偏微分方程式論はじめその他の応用上極めて有用である(例えば後述第3章§7等参照).

定義 2.4.2. Mを実解析的多様体，Xをその複素化とする．X上の函数$f(x)$が**正型** (positive type) であるとは，$\mathrm{Re}f(x)=0$ $(x\in M)$ ならば $\mathrm{Im}f(x)\geqq 0$，となることを謂う.

命題 2.4.3. Mを実解析的多様体，Xをその複素化とする．$f(x)$を正型な複素数値実解析函数とする．$x_0\in M$ に対し $f(x_0)=0$ かつ $df(x_0)$ は0でない実ベクトルであるとする．この時，$\langle v_0, df(x_0)\rangle>0$ なる v_0 に対して $\{f^{-1}(D_\varepsilon)-M\}\cup\sqrt{-1}SM$ は x_0+iv_00 の近傍である．但し，ここで $\varepsilon>0$ は任意の正数であり，$D_\varepsilon \underset{\mathrm{def}}{=} \{\tau\in C\,|\,\mathrm{Im}\tau+\varepsilon|\mathrm{Re}\tau|>0\}$ と定めた.

［証明］ 座標変換で不変な命題であるから $x_0=0$ としてよい．又，仮定からその近傍で $d\mathrm{Re}f(x)\neq 0$ である．従って $\mathrm{Re}f(x)=x_1$ としてよい．従って **Weierstrass の予備定理***)により，$f(x)=h(x)(x_1-g(x'))$，$g(0)=0$，$h(0)\neq 0$，但しここで $x'=(x_2,\cdots,x_n)$ であると表わせる.

さてこの時，$dx_1(0)=df(0)=h(0)(dx_1(0)-dg(x'))$ であるから $h(0)=1$ かつ $dg(0)=0$ を得る．$x_1=\mathrm{Re}f=x_1\mathrm{Re}h-\mathrm{Re}(gh)$ であるから $\mathrm{Re}f=0$ ならば $\mathrm{Re}(gh)=0$，更に $\mathrm{Im}\,f=x_1\mathrm{Im}h-\mathrm{Im}(gh)$ 故，$\mathrm{Re}\,f=0$ ならば $\mathrm{Im}\,f=-\mathrm{Im}(gh)$ である．fは正型であるから，これらのことより

---

*) Weierstrass の予備定理とは次の定理を謂う.

定理. fが原点の近傍で $z_1,\cdots,z_n,w$ の正則函数であり，$f(0)=0$，$f(0,w)==a_sw^s+a_{s+1}w^{s+1}+\cdots$ $(a_s\neq 0)$ を満たすとする．この時

$$f=h(z_1,\cdots,z_n,w)[w^s+g_1(z_1,\cdots,z_n)w^{s-1}+\cdots+g_s(z_1\cdots z_n)]$$

となる正則函数 h, g_k $(k=1,\cdots,s)$ が存在し $g_k(0)=0, h(0)\neq 0$ が満たされる.

証明は例えば一松［1］を参照されたい．なお，我々は後に(第4章第1節定理 4.1.9)擬微分作用素に対する類似の結果を紹介する.

$h(0,x')g(x')=-\sqrt{-1}\varphi(x')$，但し $\varphi(0)=0$，かつ $\varphi(x')\geqq 0$，と表わせる．

まず $\tilde{f}(x)=x_1-g(x')$ について命題を証明しよう．そうすれば $f(x+iy)=$ $=h(x+iy)\tilde{f}(x+iy)$ かつ $h(0)=1$ 故，原点に十分近いところでは f についても命題の成り立つことが判る．

今，適当に座標変換を行うことにより $v_0=\partial/\partial x_1$ と仮定しても構わない．実際 $v_0=\dfrac{\partial}{\partial x_1}+a_2\dfrac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+a_n\dfrac{\partial}{\partial x_n}$ に対して $x_1'=x_1$，$x_2'=x_2-a_2x_1$，…，$x_n{}'=x_n-a_nx_1$ と座標変換すれば $v_0(x_1')=1$，$v_0(x_j')=0$ $(j\neq 1)$ となるから，新しい座標系においては $v_0=\dfrac{\partial}{\partial x_1'}$ である．

さて，この時，

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\tilde{f}(x+iy)+\varepsilon|\operatorname{Re}\tilde{f}(x+iy)|&=y_1-\operatorname{Im}g(x'+iy')+\varepsilon|x_1-\operatorname{Re}g(x'+iy')|\\&\geqq y_1-\operatorname{Im}g(x'+iy')+\varepsilon\{|x_1|-|\operatorname{Re}g(x'+iy')\}\\&\geqq y_1-\{\operatorname{Im}g(x'+iy')+\varepsilon|\operatorname{Re}g(x'+iy')|\}\end{aligned}$$

である．今の場合，$v_0=\partial/\partial x_1$ としたから $|v-v_0|\ll 1$ なる条件は $0<|y'|/y_1\ll 1$ という条件に置き換え得ることに注意しておこう．

今 $g(x')=-i\varphi(x')\phi(x')$，但し $\phi(x')=h(0,x')^{-1}$，$\phi(0)=1$ であり $\varphi(x'+iy')=\varphi(x')+i\langle y',d_{x'}\varphi(x')\rangle+O(|y'|^2)=\varphi(x')+O(|y'|)$ であるから，$-(\operatorname{Im}g(x'+iy')+\varepsilon|\operatorname{Re}g(x'+iy')|=O(|y'|)+(\operatorname{Im}(i\varphi(x')\phi(x'+iy'))-$ $\varepsilon|\operatorname{Re}(i\varphi(x')\phi(x'+iy'))|)$ となる．$\varphi(x')\geqq 0$ で $\phi(0)=1$ だから $x'+iy'$ を十分 0 に近く取れば任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$\operatorname{Im}(i\varphi(x')\phi(x'+iy'))-\varepsilon|\operatorname{Re}(i\varphi(x')\phi(x'+iy'))|>0$$

となる．結局 $\operatorname{Im}\tilde{f}(x+iy)+\varepsilon|\operatorname{Re}\tilde{f}(x+iy)|\geqq y_1+O(|y'|)$ が得られたことになる．ここで $0<|y'|/y_1\ll 1$ と取れば，明らかに $y_1+O(|y'|)>0$ が成立する．従って，$|x|\ll 1$，$|v-v_0|\ll 1$，$0<t\ll 1$ に対して

$\operatorname{Im}f(x+itv)+\varepsilon|\operatorname{Re}\ f(x+itv)|>0$ が成立することになる． (証終)

命題 2.4.3 の応用例として，$(x_1+i(x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2)+i0)^\lambda$ (λ は 0 でも正の整数でもないとする) と云う超函数を考察してみよう．この超函数はその特異性スペクトルが一点に限られる，と云う意味で理論上も応用上極めて重要なものである．例えば理論的には第 3 章第 7 節で示す microfunction の層の脆弱性と表裏一体を為すものであり，応用面から言えば，線型微分方程式の(非)可解性と密接に関係している (第 4 章第 3 節定理 4.3.8 等参照)．

例 2.4.4. $f(x)=x_1+i(x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2)$ と置く．$f(x)$ は $\boldsymbol{R}^n$ 上で正型であり $f(0)=0$ かつ $df(0)=(1,0,\cdots,0)$ となっているから，命題 2.4.3 が適用できる．即ち，$\{z\in\boldsymbol{C}^n-\boldsymbol{R}^n \mid \mathrm{Im}\,f(z)+\varepsilon|\mathrm{Re}\,f(z)|>0\}$ は $\{0+iv0 \mid \langle v, idf(0)\rangle>0\}$ の錐状近傍となる．従って，$(f(x)+i0)^\lambda$ の特異性スペクトルは $\{(x, i\xi\infty)\mid \xi=(1,0,\cdots,0)\}$ に含まれる．他方，$\boldsymbol{R}^n$ 上 $f(x)=0$ となるのは，$x=0$ の時のみであるから原点以外では $(f(x)+i0)^\lambda$ は実解析的である．従って

$$\mathrm{S.S.}(f(x)+i0)^\lambda\subset\{(x, i\xi\infty)\mid x=0,\ \xi=(1,0,\cdots,0)\}$$

となる．$\lambda\neq0,1,2,\cdots$ ならば明らかに $(f(x)+i0)^\lambda$ は原点において解析的ではないから，結局

$$\mathrm{S.S.}(f(x)+i0)^\lambda=\{(x, i\xi\infty)\mid x=0,\ \xi=(1,0,\cdots,0)\}$$

を得る．

問． $\{(z_1,z_2)\in\boldsymbol{C}^2|\mathrm{Im}(z_1+iz_2{}^2)>0\}$ がどのような形状の領域になるか，自ら図を描いて考えてみよ．又，それにより $(x_1+ix_2{}^2-i0)^\lambda$ については(上述のような“正則函数の境界値”としての)自然な扱いは不可能であることを悟られたい．

次に種々の具体的超函数の例を与えてくれるフーリエ (Fourier) 級数を我々の立場から考察してみよう．

命題 2.4.4.(フーリエ級数) $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\boldsymbol{Z}^n$に対して $u(x)=\sum_{\alpha\in\boldsymbol{Z}^n}a_\alpha e^{2\pi i\langle x,\alpha\rangle}$ $(x\in\boldsymbol{R}^n)$ と置く，任意の $\varepsilon>0$ に対して定数 C_ε を適当にとれば各 α について $|a_\alpha|\leqq C_\varepsilon e^{\varepsilon|\alpha|}$ *) が成り立つと仮定する．この時 $u(x)$ は well-defined な超函数である．

注意． ある $N>0$ と $C>0$ が存在して $|a_\alpha|\leqq C|\alpha|^N$ ならば $u(x)$ は distribution になることが知られている．

[証明] まず $\boldsymbol{R}^n$ 内の閉じた凸錐であって直線を含まないもの，又は，それの頂点を $a\in\boldsymbol{R}^n$ に移したもの，$G_j(j=1,\cdots,N)$ に対し，$\Gamma_j\subset G_j$ となり，しかも $\boldsymbol{Z}^n=\bigsqcup_{j=1}^{n}\Gamma_j$ となるように $\Gamma_j(j=1,\cdots,N)$ を定めよう。その時 $u(x)=\sum_{j=1}^{N}\sum_{\alpha\in\Gamma_j}a_\alpha e^{2\pi i\langle x,\alpha\rangle}$ と分割すれば各 j について $\sum_{\alpha\in\Gamma_j}a_\alpha e^{2\pi i\langle z,\alpha\rangle}$ が $z\in\boldsymbol{R}^n\times$

---

*) 多重指数 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ に対して $|\alpha|$ とは $\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|$ のことである．以下，この記号 $|\alpha|$ は一々断らずにこの意味に用いる．

$\sqrt{-1}G_j^\circ$ (G_j° は G_j の極集合)で正則になることをまず示そう.

補題. G を閉じた錐であって直線を含まないものとする. 又, U は開錐であって $\overline{U}\subset G^\circ\cup\{0\}$ を満たすものとしよう. この時, ある $\delta>0$ が存在して

$$x\in U,\ y\in G \text{ ならば } |\langle x, y\rangle|\geqq\delta|x||y|$$

が成り立つ.

証明. $S=\{x\in \boldsymbol{R}^n||x|=1\}$ と定める.

$$\begin{array}{ccc}(S\cap\overline{U})\times(S\cap G) & \longrightarrow & \boldsymbol{R}\\ \Cup & & \Cup\\ (x,y) & \longmapsto & \langle x,y\rangle\end{array}$$

の像はコンパクトであるから閉集合であり, しかも極集合の定義により $\langle x,y\rangle>0$. 従って U, G が錐であることから $|\langle x, y\rangle|\geqq\delta|x||y|$ を得る. (証終)

命題 2.4.4 の証明に戻ろう. 今 U を G_j° に含まれる任意の開凸錐とすると, 補題によりある $\delta>0$ に対して $\mathrm{Im}z\in U$ ならば $\langle\mathrm{Im}z, \alpha\rangle\geqq\delta|\mathrm{Im}z|\ |\alpha|$ が成立するから

$$|\sum_{\alpha\in\Gamma_j}a_\alpha e^{2\pi i\langle z,\alpha\rangle}|\leqq\sum_{\alpha\in\Gamma_j}C_\varepsilon e^{\varepsilon|\alpha|}e^{-2\pi\langle\mathrm{Im}z,\alpha\rangle}\leqq C_\varepsilon\sum_{\alpha\in\Gamma_j}e^{\varepsilon|\alpha|-2\pi\delta|\mathrm{Im}z||\alpha|}$$

が成立する. ここで $\varepsilon>0$ を十分小さくとれば $e^{\varepsilon|\alpha|-2\pi\delta|\mathrm{Im}z|}<1$ となるから $\sum_{\alpha\in\Gamma_j}a_\alpha e^{2\pi i\langle z,\alpha\rangle}$ は $\boldsymbol{R}^n\times\sqrt{-1}\,U$ において一様収束し, 従って正則函数を表わす. よってこの境界値として $\boldsymbol{R}^n$ 上の超函数

$$u_j(x)=\sum_{\alpha\in\Gamma_j}a_\alpha e^{2\pi i\langle x,\alpha\rangle}$$

が定義される. 故に $u(x)=\sum_{j=1}^N u_j(x)$ とすれば $u(x)$ は超函数となる. これが $\boldsymbol{Z}^n$ の分割によらずに well-defined になることは以下の命題 2.4.5 の証明と同じであるから, ここでは省略する. (証終)

例 2.4.5. (ポアソン (Poisson) の和公式) $\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{2\pi inx}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n)$

[証明] $u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{2\pi inx}+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-2\pi inx}$ と分割すると $\mathrm{Im}z>0$ では $\sum_{n=0}^{\infty}e^{2\pi inz}=\dfrac{1}{1-e^{2\pi iz}}$ となり, これは正則, 従って第一項$=\dfrac{1}{1-e^{2\pi i(x+i0)}}$ である. $\mathrm{Im}z<0$ では $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-2\pi inz}=\dfrac{e^{-2\pi iz}}{1-e^{-2\pi iz}}=-\dfrac{1}{1-e^{2\pi iz}}$ となり, 第二項$=-\dfrac{1}{1-e^{2\pi i(x-i0)}}$. 従って

$$u(x)=\frac{1}{1-e^{2\pi i(x+i0)}}-\frac{1}{1-e^{2\pi i(x-i0)}}$$

を得る．ところが $(-1,1)\subset \boldsymbol{R}$ のある複素近傍において

$$\frac{1}{1-e^{2\pi iz}}=\frac{1}{-2\pi iz}+\text{正則函数}$$

と書けるから，$(-1,1)$において

$$u(x)=\frac{1}{-2\pi i}\left(\frac{1}{x+i0}-\frac{1}{x-i0}\right)=\delta(x)$$

が成り立つ．他方明らかに $u(x+n)=u(x)$ $(n\in\boldsymbol{Z})$ であるから，結局，$u(x)=$ $=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n)$ を得る．（証終）

次に $\alpha(\in\boldsymbol{Z}^n)$ を連続化した概念，即ち，フーリエ変換について簡単な場合を一つ扱っておこう．

命題 2.4.5（フーリエ変換）　$f(y)$ を $\boldsymbol{R}^n$ 上で定義された局所可積分函数であって任意の $\varepsilon>0$ に対して定数 C_ε が存在して $|f(y)|\leqq C_\varepsilon e^{\varepsilon|y|}$ なる不等式が測度 0 の集合を除いて成り立つものとする。この時 $f(y)$ のフーリエ変換 $u(x)=\int_{\boldsymbol{R}^n}f(y)e^{2\pi i\langle x,y\rangle}dy$ は超函数として well-defined である．

［証明］　$\boldsymbol{R}^n=\Gamma_1\cup\cdots\cup\Gamma_N$ と分割する．ここで Γ_j は閉凸錐であって直線を含まないものとする．更に $\Gamma_j\cap\Gamma_k$ は $j\neq k$ ならば測度 0 となるように選ぶものとする．この時，容易に判るように $\Gamma_i{}^\circ$ は空でない開集合である．又，$\varphi_{\Gamma_i}(x)=\inf_{y\in\Gamma_i,|y|=1}<x,y>$ とおけば $\Gamma_j{}^\circ=\{x|\varphi_{\Gamma_j}(x)>0\}$ となることもほぼ自明であろう．さて $\mathrm{Im}z\in\Gamma_i{}^\circ$ ならば $u_{\Gamma_i}(z)\underset{\mathrm{def}}{=}\int_{\Gamma_i}f(y)e^{2\pi i\langle z,y\rangle}dy$ は z の正則函数になることを示そう．$\mathrm{Im}z\in\Gamma_i{}^\circ, y\in\Gamma_i$ ならば $\mathrm{Im}<z,y>=<\mathrm{Im}z,y>>0$ であるから $\mathrm{Im}<z,y>\geqq|y|\varphi_{\Gamma_i}(\mathrm{Im}z)$ なる不等式が成り立つ．従って

$$|e^{2\pi i\langle z,y\rangle}|=e^{-2\pi\mathrm{Im}\langle z,y\rangle}\leqq\exp(-2\pi|y|\varphi_{\Gamma_i}(\mathrm{Im}z))\quad(y\in\Gamma_i)$$

を得る．結局

$$|u_{\Gamma_i}(z)|\leqq\int_{\Gamma_i}|f(y)||e^{2\pi i\langle z,y\rangle}|dy\leqq\int_{\Gamma_i}C_\varepsilon\exp(-|y|2\pi\varphi_{\Gamma_i}(\mathrm{Im}z)-\varepsilon))dy$$

ここで ε を十分小さくとって $\alpha=2\pi\varphi_{\Gamma_i}(\mathrm{Im}z)-\varepsilon>0$ とすれば，

$$|u_{\Gamma_i}(z)|\leqq C_\varepsilon\int_{\boldsymbol{R}^n}e^{-\alpha|y|}dy=C_\varepsilon\sigma_{n-1}\alpha^{-n}\Gamma(n)<+\infty$$

が成り立ち，$u_{\Gamma_i}(z)$ は $\mathrm{Im}z\in\Gamma_i$ ならば z の正則函数となる．但し σ_{n-1} は球面 S^{n-1} の面積を表わす．

さて $u_{\Gamma_i}\in\mathcal{O}(\boldsymbol{R}^n\times\sqrt{-1}\Gamma_i{}^\circ)$ が判ったから $u(x)=\sum_{i=1}^{N}u_{\Gamma_i}(x+\sqrt{-1}\Gamma_i{}^\circ 0)$ *) を

*)　$\boldsymbol{R}^n\times\sqrt{-1}\Gamma_i$ から境界値をとった，の意である．

考えることができ，$u(x)$ は超函数となる．次に，$u(x)$ が $\boldsymbol{R}^n$ の分割 $\boldsymbol{R}^n=\Gamma_1\cup\cdots\cup\Gamma_N$ の取り方に依存しないことを証明しよう．二つの分割 $\boldsymbol{R}^n=\Gamma_1\cup\cdots\cup\Gamma_N=\Gamma_1'\cup\cdots\cup\Gamma_M'$ がある時 $\Gamma''_{ij}=\Gamma_i\cap\Gamma_j'$ のうち測度0でないものだけを集めて第3の分割 $\boldsymbol{R}^n=\Gamma''_1\cup\cdots\cup\Gamma''_L$ ができる．これを考えることにより最初から $\Gamma'_1\cup\cdots\cup\Gamma'_M$ を $\Gamma_1\cup\cdots\cup\Gamma_N$ の細分と仮定してもよい．$\Gamma_i=\Gamma'_{i_1}\cup\cdots\cup\Gamma'_{i_k}$ としよう．(k は i に依存する．) 以下 $u_{\Gamma_i}(z)$ を $u_i(z)$，$u'_{\Gamma_j}(z)$ を $u_j'(z)$ と略記することにしよう．さて，$\Gamma_i\supset\Gamma'_{ij}(1\leqq j\leqq k)$ 故 $\Gamma_i^\circ\subset\Gamma'^\circ_{i_1}\cap\cdots\cap\Gamma'^\circ_{i_k}$ である．従って $\mathrm{Im}z\in\Gamma_i^\circ$ ならば $\mathrm{Im}z\in\Gamma'^\circ_{i_j}$ となる．従って $u_i(z)$ が定義できれば $u'_{i_j}(z)$ も定義できる．また，$\Gamma_i=\Gamma'_{i_1}\cup\cdots\cup\Gamma'_{i_k}$ であるから，明らかに，$u_i(z)=u'_{i_1}(z)+\cdots+u'_{i_k}(z)$ が成り立つ．従って $u_i(x+\sqrt{-1}\Gamma_i0)=u'_{i_1}(x+\sqrt{-1}\Gamma_i0)+\cdots+u'_{i_k}(x+\sqrt{-1}\Gamma_i0)$ が成り立つ．故に $u(x)$ は分割のとり方によらずに well-defined である．　　(証終)

例 2.4.6.　例えば $f(y)\equiv1$ ならば命題2.4.5の条件は自明に満たされるから $u(x)=\int_{\boldsymbol{R}}e^{2\pi ixy}dy$ は超函数になっている．実はこれは δ-函数に等しい．即ち，

$$\delta(x)=\int_{\boldsymbol{R}}e^{2\pi ixy}dy.$$

［証明］　$\mathrm{Im}z>0$ の時

$$\int_0^\infty e^{2\pi izy}dy=\frac{e^{2\pi izy}}{2\pi iz}\Bigg|_0^\infty=-\frac{1}{2\pi iz}$$

であるから

$$\int_0^\infty e^{2\pi ixy}dy=-\frac{1}{2\pi i(x+i0)}$$

となる．同様にして

$$\int_{-\infty}^0 e^{2\pi ixy}dy=\frac{1}{2\pi i(x-i0)}.$$

従って

$$\int_{\boldsymbol{R}}e^{2\pi ixy}dy=\int_0^\infty e^{2\pi ixy}dy+\int_{-\infty}^0 e^{2\pi ixy}dy=\delta(x).$$

(証終)

注意.　ここでは述べないがフーリエ変換の一般論として次のことが知られている．$\boldsymbol{R}^n$ に無限遠点 S^{n-1} を加えてコンパクト化したものを D^n とする．その時 D^n 上に脆弱層 $\mathcal{Q}$ *) が存在して $\mathcal{Q}|_{\boldsymbol{R}^n}=\mathcal{B}_{\boldsymbol{R}^n}$ となる．そして $\mathcal{Q}(D^n)$ と

*)　本章第1節定義2.1.3で導入した層 $\mathcal{Q}$ とは全く別物である．

$\mathcal{Q}(D_n^*)$ (D_n^* は D_n の双対であり，それは D_n と同一視できる.)はフーリエ変換，および逆フーリエ変換で互いに対応する．(河合 [1])

命題 2.4.5 によりその存在が保証された超函数 $u(x)=\int_{R^n} f(y)e^{2\pi i\langle x,y\rangle}dy$ について，$f(y)$ の台に関する条件をつけて $u(x)$ の特異性スペクトルを調べることを試みよう．

定義 2.4.3. $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 G に対して $G\infty \underset{\text{def}}{=} \{y\in\boldsymbol{R}^n-\{0\}\mid$ 任意の $N>0$ と任意の $\varepsilon>0$ に対して $G\cap\left\{y' \mid |y'|\geqq N, \left|\frac{y'}{|y'|}-\frac{y}{|y|}\right|<\varepsilon\right\} \neq \phi$ が成立する$\}$ と定める．

例えば $\boldsymbol{R}^2$ において $G_1=\{(x,y)\mid xy\geqq 1, x>0\}$, $G_2=\{(x,y)\mid y\geqq x^2\}$ とすれば $G_1\infty=\{(x,y)\mid x\geqq 1,\ y\geqq 1\}$, $G_2\infty=\{(x,y)\mid x=0\}$ である．明らかに $G\infty=\{y\in\boldsymbol{R}^n-\{0\}\mid y$ を含む任意の開錐と G の交わりが相対コンパクトではない$\}$ である．更に次の事実が成立する．

補題. G を $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合とする．集合族 $\mathcal{G}$ を $\{G'\subset\boldsymbol{R}^n \mid G'$ は閉錐であって，適当な $a\in\boldsymbol{R}^n$ をとれば $G'\supset G+a$ となる.$\}$ により定めれば，$G\infty=\bigcap_{G'\in\mathcal{G}} G'$ が成立する．

［証明］ $y\in G\infty$ として U を y を含む開錐とする．その時閉錐 T と開錐 V であって $y\in V\subset T\subset U$ となるものが存在する．従って $T\cap G$ は相対コンパクトではないから，$G'\supset G+a$ なる任意の閉錐 G' と $a\in\boldsymbol{R}^n$ に対して $T\cap(G'-a)$は相対コンパクトではない，ところが一般に二つの閉錐 G_1, G_2 と $a\in\boldsymbol{R}^n$ に対して，$G_1\cap G_2=\phi$ と $(G+a)\cap G_2$ が相対コンパクトであることは同値であるから，今の場合 $T\cap G'\neq\phi$ を得る．従って $U\cap G'\neq\phi$ であり，このことから $y\in G'$ となる．何故ならば $y\notin G'$ とすれば G' は閉集合であるから $y\in\Omega$, $\Omega\cap G'=\phi$ となる開集合 Ω が存在する．$U \underset{\text{def}}{=} \boldsymbol{R}^+\cdot\Omega=\{\lambda x\mid\lambda\in\boldsymbol{R}^+, x\in\Omega\}$ と置くと U は y を含む開錐であり，しかも $U\cap G'=\phi$ となるからである．よって $G\infty\subset\bigcap_{G'\in\mathcal{G}} G'$ が言えた．次に $y\in\bigcap_{G'\in\mathcal{G}} G'$ かつ $y\notin G\infty$ としよう．そうすれば y を含む開錐 U で $U\cap G$ があるコンパクト集合 K に含まれるようなものが存在する．その時，$a\in U$ かつ$(U+a)\cap K=\phi$ となる a が存在する(次頁の図参照)．

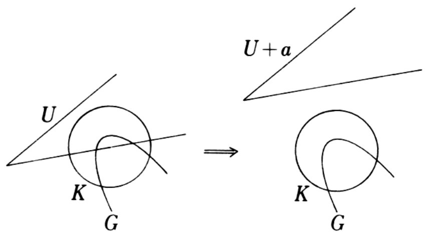


図 2.4.1.

Uは凸であると仮定してもよいから $U+U\subset U$ が成り立つとしてもよい.

従って $(U+a)\cap G\subset U\cap G\subset K$ より $(U+a)\cap G\subset(U+a)\cap K=\phi$. 従って $U\cap(G-a)=\phi$ となる. $G'=\boldsymbol{R}^n-U$ は閉錐であり $G-a\subset G'$ かつ $y\notin G'$ となりこれは矛盾である. 従って $y\in G'$ である.

(補題の証終)

命題 2..4.6. $f(x)$ を命題 2.4.5 の条件を満たす函数として, $G=\mathrm{Supp}f$ と定める. この時超函数 $u(x)=\int_{\boldsymbol{R}^n}f(y)e^{2\pi i\langle x,y\rangle}dy$ の特異性スペクトルは $\{(x,\sqrt{-1}\xi\infty)\,|\,\xi\in G\infty\}$ に含まれる*).

［証明］ $\xi\notin G\infty$ としよう. そうすれば補題により $G+a\subset G'$ かつ $\xi\notin G'$ となる閉錐 G' と $a\in\boldsymbol{R}^n$ が存在する. 次に直線を含まない閉凸錐 G_j を $G'\subset\bigcup_{j=1}^N G_j$ かつ $\xi\notin\bigcup_{j=1}^N G_j$ となるように選べば, 命題 2.4.5 により $u_j(z)=\int_{G_j-a}f(y)e^{2\pi i\langle z,y\rangle}dy$ は $z\in\boldsymbol{R}^n\times\sqrt{-1}G_j{}^\circ$ で正則である. 従って $\mathrm{S.S.}u_j(x+\sqrt{-1}G_j{}^\circ 0)\subset\sqrt{-1}G_j$. 然るに $u(x)=\sum_{j=1}^N u_j(x+\sqrt{-1}G_j{}^\circ 0)$ であるから S.S. $u(x)\subset\bigcup_{j=1}^N\sqrt{-1}G_j$ が成立する. 従って G_j の選び方により $\xi\notin G_j$ であったから $(x,\sqrt{-1}\xi\infty)\notin\mathrm{S.S.}u$ となる.

(証終)

注意. $\int_{G_j-a}f(y)e^{2\pi i\langle x,y\rangle}dy=e^{-\langle x,a\rangle}\int_{G_j}f(y-a)e^{2\pi i\langle x,y\rangle}dy$ であるから収束性に関しては G_j を a だけずらして (G_j-a) とすることに問題はない.

例 2.4.7. 命題 2.4.6 の易しい適用例として $\int_{\boldsymbol{R}}y_+^\lambda e^{2\pi ixy}dy$ $(\mathrm{Re}\lambda>0)$ を考えてみよう. この場合, $G=G\infty=\overline{\boldsymbol{R}^+}$ である. 実際にこの積分を実行すると

---

*) p.76 で触れた Bros-Iagolnitzer の essential support の理論は, この結果をつきつめていったものと謂える. "Essential support" という名前はこれによるのであろう. 物理的に言えば命題 2.4.6. は microcausality に関係した性質であり, 特異性スペクトルの理論と直接関係するのは macrocausality である. Macrocausality と関連して, 特異性スペクトルの理論の原型とも云うべきものが, microfunction の理論の誕生と同じ頃, 全く独立に物理学者によって展開されていたということは興味深い. (Iagolnitzer-Stapp〔1〕等を参照)

$$\int y_+^{\lambda} e^{2\pi i\langle x,y\rangle}dy=\int_0^{\infty} y^{\lambda}e^{2\pi ixy}dy=\int_0^{\infty}\left(\frac{t}{-2\pi ix}\right)^{\lambda}e^{-t}\frac{dt}{(-2\pi ix)}=$$

$$=(-2\pi i(x+i0))^{-(\lambda+1}\Gamma(\lambda+1)=\frac{\Gamma(\lambda+1)e^{\frac{\pi}{2}i(1+\lambda)}}{(2\pi)^{1+\lambda}(x+i0)^{1+\lambda}}$$

となるから，その特異性スペクトルは $(0, idx\infty)$ に含まれる*).

最後に，今まで述べてきた例とやや毛色の変わった例として，$1/(x+\sqrt{-1}y)$ を超函数として定義することを試みてこの節を終ろう．この超函数に関して以下に示す性質(2.4.4)は応用上重要である．

例 2.4.8. ($1/(x+\sqrt{-1}y)$ を境界値を用いて定義すること)

$$\Omega_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}=\{(z,w)\in \boldsymbol{C}^2 \mid \varepsilon_1 \mathrm{Im} z>0, \varepsilon_2 \mathrm{Im} w>0\} \quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2=\pm)$$

と置く，以下 $\log z$ により，$\log z|_{z=1}=0$ となる分枝を選んで $\boldsymbol{C}-\{x\in \boldsymbol{R} \mid x\leqq 0\}$ で定義された対数函数を表わすこととする．この時

$\log z-\log w+\pi i/2$ は $\Omega_{+,+}$ で $z+iw=0$ で零点をもつ．従って $\varphi_{+,+}(z,w)=(\log z-\log w+\pi i/2)/(z+\sqrt{-1}w)$ は $\Omega_{+,+}$ 上で正則である．同様にして

$$\varphi_{-,+}=\left(\log z-\log w+\frac{\pi i}{2}\right)/(z+\sqrt{-1}w),$$

$$\varphi_{+,-}=\left(\log z-\log w-\frac{3}{2}\pi i\right)/(z+\sqrt{-1}w),$$

$$\varphi_{-,-}=\left(\log z-\log w+\frac{\pi i}{2}\right)/(z+\sqrt{-1}w)$$

と置けば，$\varphi_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ は $\Omega_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ で正則な函数となる。そこで

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi i}\left(b_{\Omega_{+,+}}(\varphi_{+,+})-b_{\Omega_{+,-}}(\varphi_{+,-})-b_{\Omega_{-,+}}(\varphi_{-,+})+b_{\Omega_{-,-}}(\varphi_{-,-})\right)$$

と置こう．但し，ここで $b_{\Omega\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\varphi_{\varepsilon_1,\varepsilon_2})$ は $\varphi_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ の $\Omega_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ 方向からの境界値を表わす．その時，

$$2\pi\sqrt{-1}(x+\sqrt{-1}y)u=$$
$$=b_{\Omega_{+,+}}(\log z-\log w+\pi\sqrt{-1}/2)-b_{\Omega_{+,-}}(\log z-\log w-3\pi\sqrt{-1}/2)$$
$$-b_{\Omega_{-,+}}(\log z-\log w+\pi\sqrt{-1}/2)+b_{\Omega_{-,-}}(\log z-\log w+\pi\sqrt{-1}/2)=$$
$$=\{\log(x+\sqrt{-1}0)-\log(y+\sqrt{-1}0)+\pi\sqrt{-1}/2\}-$$
$$\{\log(x+\sqrt{-1}0)-\log(y-\sqrt{-1}0)-3\pi\sqrt{-1}/2\}-$$

---

*) ここでは $\mathrm{Re}\lambda>0$ と仮定したが第3章§8の議論を用いれば，$\lambda=-1,-2,\cdots$ を除けば両辺とも確定して上の等式が成り立つことが容易に判る．

$$\{\log(x-\sqrt{-1}0)-\log(y+\sqrt{-1}0)+\pi\sqrt{-1}/2\}+$$
$$\{\log(x-\sqrt{-1}0)-\log(y-\sqrt{-1}0)+\pi\sqrt{-1}/2\}=2\pi\sqrt{-1}$$

となる．従って

(2.4.3) $$(x+\sqrt{-1}y)u=1$$

が成り立つ．特に $(x, y)\neq(0, 0)$ で $u=1/(x+\sqrt{-1}y)$ を得る．次に

(2.4.4) $$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right)u=\pi\delta(x, y)$$

を証明しよう．$c\in\boldsymbol{C}$ に対して

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}+\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial w}\right)\left(\frac{1}{z+\sqrt{-1}w}(\log\ z-\log\ w+c)\right)=$$
$$=\frac{1}{z+\sqrt{-1}w}\left(\frac{1}{z}-\frac{\sqrt{-1}}{w}\right)=-\frac{\sqrt{-1}}{zw}$$

となる．よって

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right)u=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\left\{\frac{-\sqrt{-1}}{(x+\sqrt{-1}\,0)(y+\sqrt{-1}\,0)}\right.$$
$$+\frac{\sqrt{-1}}{(x+\sqrt{-1}0)(y-\sqrt{-1}0)}+\frac{\sqrt{-1}}{(x-\sqrt{-1}0)(y+\sqrt{-1}0)}$$
$$\left.-\frac{\sqrt{-1}}{(x-\sqrt{-1}0)(y-\sqrt{-1}0)}\right\}=(-\sqrt{-1})(2\pi\sqrt{-1})\delta(x, y)$$

を得る．式(2.4.4)はこれより直ちに導かれる．又，$\left(z\frac{\partial}{\partial z}+w\frac{\partial}{\partial w}+1\right)\varphi_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}=0$ より

(2.4.5) $$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+1\right)u=0$$

を得る．又

(2.4.6) $$\left(y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}-\sqrt{-1}\right)u=0$$

である．実際，式(2.4.6)に式(2.4.5)の $\sqrt{-1}$ 倍を加えて

$$\left(y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}-\sqrt{-1}\right)u=\left((y+\sqrt{-1}\,x)\frac{\partial}{\partial x}-(x-\sqrt{-1}\,y)\frac{\partial}{\partial y}\right)u$$
$$=(y+\sqrt{-1}\,x)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right)u$$
$$=2\pi(y+\sqrt{-1}\,x)\delta(x, y)=0$$

を得るからである．

第3章　基本的な演算

§1.　積，制限，代入

この節では超函数および microfunction に対して，それ等の積，制限，代入等について論じる．記号は今までと同様である．なお，本書では，入門書としての性格を考慮して，次の命題 3.1.1 を証明抜きで**仮定**し，その後の議論を厳密に展開することで満足することとした．命題 3.1.1 を(定義函数の言葉に直して)直接証明することは，技術的にかなり面倒になるように思われることが主因である．また，論理的には，種々の演算についての議論をまず行って，その結果を用いて命題 3.1.1(或いは更に強く microfunction の層の脆弱性——これについては本章第7節を参照されたい)を証明する方がすっきりするが (S-K-K[1] はこの方針で議論を進めている)，これは具体的なイメージを把握しにくくする説明の仕方のように思われるので本書では採用しなかった．

命題 3.1.1.　$V_j(\subset\sqrt{-1}S^*M)$ $(j=1, \cdots, N<\infty)$ を開集合とする．$V=\bigcup_j V_j$ と置く時

(1)　$f\in\mathcal{B}_{\mathrm{M}}(M)$ かつ S.S.$f\subset V$ ならば，各 $x\in M$ についてその近傍 W が存在して S.S.$f_j\subset V_j\cap\pi^{-1}(W)$ となる $f_j\in\mathcal{B}_{\mathrm{M}}(W)$ であって $f=\sum_j f_j$ が W で成り立つものを見つけることができる．

(2)　$f_j\in\mathcal{B}_{\mathrm{M}}(M)$，S.S.$f_j\subset V_j$ かつ $\sum_j f_j=0$ ならば M の任意の点 x に対して，その適当な近傍 W を取れば，$f_{jk}\in\mathcal{B}(W)$ で $f_{jk}=-f_{kj}$ かつ S.S.$f_{jk}\subset V_j\cap V_k\cap\pi^{-1}(W)$ となるものが存在して $f_j=\sum_k f_{jk}$ となるようにできる．

命題 3.1.1 を次のように言い換えることもできる．

命題 3.1.1′.　$V_j(\subset\sqrt{-1}S^*M)$ $(j=1, \cdots, N<\infty)$ を開集合とする．$V=\bigcup_j V_j$ とおく時，各 $p\in\sqrt{-1}S^*M$ に対して適当な近傍 W が存在して

(1)′　$u\in\mathcal{C}_{\mathrm{M}}(W)$ かつ $\mathrm{Supp}\,u\subset V\cap W$ ならば $u=\sum_j u_j$，$u_j\in\mathcal{C}_{\mathrm{M}}(W)$ かつ $\mathrm{Supp}\,u_j\subset V_j\cap W$ と表わせる．

(2)′ $u_j \in \mathcal{C}_M(W)$, $\mathrm{Supp}\, u_j \subset V_j$ かつ $\sum_j u_j = 0$ ならば $u_{jk} \in \mathcal{C}_M(W)$ であって $u_{jk} = -u_{kj}$ かつ $\mathrm{Supp}\, u_{jk} \subset V_j \cap V_k \cap W$ となるものが存在して $u_j = \sum_k u_{jk}$ となる.

次に，結果をより統一的に定式化する為に，超函数の台と microfunction の台を合わせた概念とも言うべきものを導入しよう．勿論，内容的に新しい概念を導入するわけではない．読者が試みに，次の定義 3.1.1 で導入する $\widehat{\mathrm{S.S.}}$ なる記号を用いずに，定理 3.1.1 の結果を書き直してみられれば，この記号を導入するのが得策であることを納得して頂けると思う．(実際，証明の途中では $\widehat{\mathrm{S.S.}}$ を用いずに結果を述べてある)．また，微分方程式系の組織的な取扱いにも，やはり (S^*M でなく，T^*M で考えるという) 以下の立場の方が便利なことも多く，その影響で $\widehat{\mathrm{S.S.}}$ を S.S. と記す文献もあるので，注意されたい．なお，後述の本章第 8 節定義 3.8.1 も参照されたい．そこでは，超函数と microfunction を合わせて考えた層 $\hat{\mathcal{C}}$ が導入され，実際，$\widehat{\mathrm{S.S.}}$ が $\hat{\mathcal{C}}$ の断面の台としての解釈を許すことが理解される.

定義 3.1.1. 実解析的多様体 M 上の超函数 $u \in \mathcal{B}_M$ に対して

$$\widehat{\mathrm{S.S.}}u \underset{\mathrm{def}}{=} \{(x, \sqrt{-1}\xi) \in \sqrt{-1}\,T^*M \mid x \in \mathrm{Supp}\, u \text{ かつ } \xi = 0\} \cup \{(x, \sqrt{-1}\xi) \in \sqrt{-1}\,T^*M \mid \xi \neq 0 \text{ かつ } (x, \sqrt{-1}\xi\infty) \in \mathrm{S.S.}u\}$$

と定義する.

注意. 明らかに $\widehat{\mathrm{S.S.}}u$ は閉であり，又

$$(x, \sqrt{-1}\xi) \longmapsto (x, \sqrt{-1}c\xi) \quad (c \geqq 0)$$

なる変換で不変である.

さて，以下超函数或いは microfunction の積，制限，代入についての諸結果を順次説明して行こう．なお，読者は始めに，まず，本節末のいくつかの例を参照された方が結果の理解が容易になるかも知れない.

定理 3.1.1. M_1, M_2 を実解析的多様体とし $M = M_1 \times M_2$ とおく．$u_1 = u_1(x_1)$, $u_2 = u_2(x_2)$ をそれぞれ M_1, M_2 上の超函数とすれば，積 $u = u(x_1, x_2) \underset{\mathrm{def}}{=} u_1(x_1)u_2(x_2)$ が規準的に定義できて

$$\widehat{\mathrm{S.S.}}u \subset \widehat{\mathrm{S.S.}}u \times \widehat{\mathrm{S.S.}}u_2$$

となる．但しここで $\sqrt{-1}\,T^*M=\sqrt{-1}\,T^*M_1\times\sqrt{-1}\,T^*M_2$ と考える．

［証明］ $\nu=1,2$ に対して $\sqrt{-1}S^*M_\nu=\bigcup_{j\in I_\nu}V_j^\nu$，但し V_j^ν は開かつ凸であって $\tau(V_j^{\nu\circ})=M_\nu$ なるもの，と $\sqrt{-1}S^*M_\nu$ を分割しよう．ここで I_ν は有限集合であるとする．問題は局所的故，命題 3.1.1 を我々の議論に用いることができる．即ち，今考える点の近傍 W_ν に対して $u_\nu=\sum_j u_j^\nu$ かつ $\mathrm{S.S.}u_j^\nu\subset V_j^\nu\cap\pi^{-1}(W_\nu)$ となる W_ν での超函数 u_j^ν を見つけることができる． $W=W_1\times W_2$ と定める．以下，$V_j^\nu\cap\pi^{-1}(W_\nu)$ をも V_j^ν と略記することにする．今 $\sqrt{-1}S^*W_\nu$ の凸閉集合 Z_j^ν を $\mathrm{S.S.}u_j^\nu\subset Z_j^\nu\subset V_j^{\nu\circ}$ ととれば極集合の定義により $Z_j^{\nu\circ}\supset V_j^{\nu\circ}$ が成り立ち，しかも $Z_j^{\nu\circ}$ は開集合である．第2章定理 2.3.5 により，$Z_j^{\nu\circ}$ の錐状近傍 D_j^ν と $f_j^\nu\in\mathcal{O}(D_j^\nu)$ が存在して $u_j^\nu=b(f_j^\nu;\,D_j^\nu)$ と表わせる．この時 $f_{j_1}^1(z_1)f_{j_2}^2(z_2)\in\mathcal{O}(D_{j_1}^1\times D_{j_2}^2)$ となる． $D_{j_\nu}^\nu$ は $Z_j^{\nu\circ}$ の錐状近傍だから $D_{j_1}^1\times D_{j_2}^2$ は $Z_j^{1\circ}\hat{\times}Z_j^{2\circ}\underset{\mathrm{def}}{=}\{(x_1,x_2)+\sqrt{-1}(\xi_1,\xi_2)0\,|\,\xi_1,\xi_2\neq0,$ $(x_\nu,\sqrt{-1}\xi_\nu 0)\in Z_j^{\nu\circ}\ (\nu=1,2)\}$ の錐状近傍になっている．しかも $Z_j^{1\circ}\hat{\times}Z_j^{2\circ}$ は凸開集合であり $\tau(Z_j^{1\circ}\hat{\times}Z_j^{2\circ})=M$ であるから $b(f_{j_1}^1(z_1)f_{j_2}^2(z_2);\,D_{j_1}^1\times D_{j_2}^2)$ は M 上の超函数である．そこで $u_1(x_1)$ と $u_2(x_2)$ の積を $u_1(x_1)u_2(x_2)=\sum_{j_1\in I_1}\sum_{j_2\in I_2}b(f_{j_1}^1(z_1)f_{j_2}^2(z_2);\,D_{j_1}^1\times D_{j_2}^2)$ と定義する．これが well-defined であることをみよう．まず被覆 V_j^ν のとり方については細分を考えることにより被覆のとり方は結果に影響を与えないことが示されるから，f_j^ν のとり方によらないことを確めよう． $u_\nu=\sum_j b(f_j^\nu;D_j^\nu)=\sum_j b(\tilde{f}_j^\nu;D_j^\nu)$ としよう $(\nu=1,2)$． $g_j^\nu=\tilde{f}_j^\nu-f_j^\nu$ とおけば $\sum_j b(g_j^\nu;D_j^\nu)=0$ かつ $\mathrm{S.S.}g_j^\nu\subset V_j^\nu$ となるから命題 3.1.1 により $b(g_j^\nu;D_j^\nu)=\sum_k w_{jk}^\nu$ と表わせる．但し $w_{jk}^\nu=-w_{kj}^\nu$，$\mathrm{S.S.}w_{jk}^\nu\subset V_j^\nu\cap V_k^\nu$，$w_{jk}^\nu\in\mathcal{B}(W_\nu)$ である．従って $D_{jk}^\nu\supset D_j^\nu\cup D_k^\nu$ なる D_{jk}^ν で $Z_j^{\nu\circ}\cup Z_k^{\nu\circ}$ の錐状近傍になっているものと $g_{jk}^\nu\in\mathcal{O}(D_{jk}^\nu)$ が存在して $w_{jk}^\nu=b(g_{jk}^\nu;\,D_{jk}^\nu)$ となる．

さて証明は $\tilde{f}_j^2=f_j^2$ の場合に行なえば十分である．

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j_1,j_2}b(\tilde{f}_{j_1}^1(z_1)f_{j_2}^2(z_2))-\sum_{j_1,j_2}b(f_{j_1}^1(z_1)f_{j_2}^2(z_2))\\
&=\sum_{j_1,j_2}b\,(g_{j_1}^1(z_1)\,f_{j_2}^2(z_2);\;D_{j_1}^1\times D_{j_2}^2)\\
&=\sum_{j_1,j_2,k_1}b(g_{j_1,k_1}^1(z_1)f_{j_2}^2(z_2);\;D_{j_1}^1\times D_{j_2}^2)\\
&=\sum_{j_1,j_2,k_1}b(g_{j_1,k_1}^1(z_1)\,f_{j_2}^2(z_2);\;D_{j_1k_1}^1\times D_{j_2}^2)\\
&=\sum_{j_1,k_1,j_2}b(g_{j_1,k_1}^1(z_1)f_{j_2}^2(z_2)+g_{k_1,j_1}^1(z_1)\,f_{j_2}^2(z_2);\;D_{j_1,k_1}^1\times D_{j_2}^2)=0
\end{aligned}
$$

となり f_j^ν のとり方に結果は依存しないことが判った．次に $\widehat{\mathrm{S.S.}}u\subset\widehat{\mathrm{S.S.}}\,u_1\times$

$\widehat{\mathrm{S.S.}}u_2$ を示そう．$\mathrm{S.S.}u_\nu \subset Z_\nu = \bigcup_j Z^\nu_{j_\nu}$ ($\nu=1,2$)，$Z^\nu_{j_2}$ は凸閉集合とすれば $D^1_{j_1} \times D^2_{j_2}$ は $Z^{1\circ}_{j_1} \hat{\times} Z^{2\circ}_{j_2}$ の錐状近傍であるから $\mathrm{S.S.}(b(f^1_{j_1}(z_1)f^2_{j_2}(z_2);\ D^1_{j_1}\times D^2_{j_2}))\subset (Z^{1\circ}_{j_1} \hat{\times} Z^{2\circ}_{j_2})^\circ$ となる．次に $(Z^{1\circ}_{j_1} \hat{\times} Z^{2\circ}_{j_2})^\circ \subset Z^1_{j_1} \hat{\times} Z^2_{j_2} \cup W_1 \times Z^2_{j_2} \cup Z^1_{j_1} \times W_2$ を示そう．実際 $((x_1, x_2), \sqrt{-1}(\xi_1, \xi_2)\infty) \in (Z^{1\circ}_{j_1} \times Z^{2\circ}_{j_2})^\circ$ とすれば，$x_1 + \sqrt{-1}v_1 0 \in Z^{1\circ}_{j_1}$ および $x_2 + \sqrt{-1}v_2 0 \in Z^{2\circ}_{j_2}$ に対して $\langle \xi_1, v_1\rangle + \langle \xi_2, v_2\rangle > 0$ が成り立つ．v_1, v_2 の任意の 正数倍によってもこの不等式は成り立つことから $\langle \xi_1, v_1\rangle \geqq 0$，$\langle \xi_2, v_2\rangle \geqq 0$ を得る．$\xi_1 \neq 0$ ならば $\langle \xi_1, v_1\rangle > 0$ となることをみよう (ξ_2 についても同様である)．実際，$Z^\circ_{j_1}$ は開集合であるから $\langle \xi_1, v_1\rangle = 0$ とすれば $\langle \xi_1, v_1\rangle > 0$ なる v_1' をとり $\varepsilon > 0$ を十分小さくとれば $v_1 - \varepsilon v_1'$ も $Z^\circ_{j_1}$ に含まれる．然るに $\langle \xi, v_1 - \varepsilon v_1'\rangle = -\varepsilon\langle \xi, v_1'\rangle < 0$ となり，これは矛盾である．よって $\xi_1 \neq 0$，$\xi_2 \neq 0$ なら任意の $v_\nu \in Z^{\nu\circ}_{j_\nu}$ に対して $\langle \xi_\nu, v_\nu\rangle > 0$ ($\nu=1,2$) となり $(x_\nu, \xi_\nu) \in Z^\nu_{j_\nu}$ ($\nu=1,2$) を得る．即ち $((x_1, x_2), \sqrt{-1}(\xi_1, \xi_2)\infty) \in Z^1_{j_1} \hat{\times} Z^2_{j_2}$ である．$\xi_1 = 0$ なら任意の $v_2 \in Z^\circ_{j_2}$ に対して $\langle \xi_2, v_2\rangle > 0$ となり $((x_1, x_2), \sqrt{-1}(0, \xi_2)\infty) \in M_1 \times Z^\circ_{j_2}$ となる．$\xi_2 = 0$ の時も同様である．結局 $\mathrm{S.S.}(b(f^1_{j_1}(Z) f^2_{j_2}(Z)) \subset Z^1_{j_1} \hat{\times} Z^2_{j_2} \cup W_1 \times Z^2_{j_2} \cup Z^1_{j_1} \times W_2$ となり，$\mathrm{S.S.}u \subset Z_1 \hat{\times} Z_2 \cup W_1 \times Z_2 \supset Z_1 \times W_2$ を得る．これが $M_1 \times M_2$ の任意の点で成立するから，結局 $\mathrm{S.S.}u \subset Z_1 \hat{\times} Z_2 \cup M_1 \times Z_2 \cup Z_1 \times M_2$ が得られる．これが $\mathrm{S.S.}\,u_\nu \subset Z_\nu$ ($\nu=1,2$) なる任意の凸閉集合に対して成り立つから，最終的に $\mathrm{S.S}u \subset \mathrm{S.S.}u_1 \hat{\times} \mathrm{S.S.}\,u_2 \cup M_1 \times \mathrm{S.S.}u_2 \cup \mathrm{S.S.}u_1 \times M_2$ を得る．このことから $\widehat{\mathrm{S.S.}}u \subset \widehat{\mathrm{S.S.}}u_1 \times \widehat{\mathrm{S.S.}}u_2$ を得る．何故ならば $((x_1, x_2), \sqrt{-1}(\xi_1, \xi_2)) \in \widehat{\mathrm{S.S.}}\,u$ とする時 $\xi_1 \neq 0, \xi_2 \neq 0$ ならば，上述のことにより $((x_1, x_2), \sqrt{-1}(\xi_1, \xi_2)\infty) \in \mathrm{S.S.}u_1 \hat{\times} \mathrm{S.S.}u_2$ となる．$\xi_1 = 0$，$\xi_2 \neq 0$ ならば $((x_1, x_2), \sqrt{-1}(0, \xi_2)\infty) \in M_1 \times \mathrm{S.S.}u_2$ であるから $x_1 \in \mathrm{Supp}\,u_1$ を言えばよい．もし $x_1 \notin \mathrm{Supp}\,u_1$ ならば $(x_1, x_2) \notin \mathrm{Supp}\,u$ (これは積が $f_j{}^\nu$ のとり方によらないことの証明と同値である) となり，矛盾である．$\xi_1 \neq 0$，$\xi_2 = 0$ の時も同様．また，$\xi_1 = \xi_2 = 0$ の時 $(x_1, x_2) \in \mathrm{Supp}\,u$ であるから明らかに $x_1 \in \mathrm{Supp}\,u_1, x_2 \in \mathrm{Supp}\,u_2$ を得る． (証終)

定義 3.1.2. M_1, M_2 を実解析的多様体，$M = M_1 \times M_2$ とする．その時

$$(\sqrt{-1}S^*M)' \underset{\mathrm{def}}{=} \sqrt{-1}S^*M - \sqrt{-1}S^*M_1 \times M_2 - M_1 \times \sqrt{-1}S^*M_2,$$

$p_1 : (\sqrt{-1}S^*M)' \longrightarrow \sqrt{-1}S^*M_1$ を

$$p_1((x_1, x_2),\ \sqrt{-1}(\xi_1, \xi_2)\infty)) = (x_1,\ \sqrt{-1}\xi_1, \infty),$$

および

$p_2:(\sqrt{-1}S^*M)' \longrightarrow \sqrt{-1}S^*M_2$ を

$p_2(((x_1, x_2),\ \sqrt{-1}(\xi_1,\ \xi_2)\infty)) = (x_2,\ \sqrt{-1}\,\xi_2\infty)$

により各々定義する．また，$\Omega_\nu(\subset\sqrt{-1}S^*M_\nu)$ $(\nu=1,2)$ を開集合とする時，

$\Omega_1 \hat{\times} \Omega_2 \underset{\text{def}}{=} \{((x_1, x_2),\ \sqrt{-1}(\xi_1, \xi_2)\infty) \mid \xi_1, \xi_2 \neq 0,\ (x_\nu, \sqrt{-1}\xi_\nu\infty) \in \Omega_\nu\ (\nu=1,2)\}$

と定める．

注意． $\Omega_1 \hat{\times} \Omega_2 = p_1^{-1}\Omega_1 \cap p_2^{-1}\Omega_2$ である．

定理 3.1.2. $p_1^{-1}\mathcal{C}_{\mathrm{M}_1} \times p_2^{-1}\mathcal{C}_{\mathrm{M}_2} \to \mathcal{C}_{\mathrm{M}}|_{(\sqrt{-1}S^*M)'}$ なる 規準的な層準同型写像が存在する．

注意． この層準同型写像を $u_1(x_1) \in \mathcal{C}_{\mathrm{M}_1}(\Omega_1)$ と $u_2(x_2) \in \mathcal{C}_{\mathrm{M}_2}(\Omega_2)$ に対して適用すればそれ等の積 $u_1(x_1)u_2(x_2) \in \mathcal{C}_{\mathrm{M}}\ (\Omega_1 \hat{\times} \Omega_2)$ を得る．

実際，$\mathcal{C}_{M_\nu} \to p_{\nu*}p_\nu^{-1}\mathcal{C}_{M_\nu}(\nu=1,2)$ なる層準同型写像が存在するから $u_\nu(x_\nu) \in \mathcal{C}_{M_\nu}(\Omega_\nu)$ に対して $u'_\nu(x_\nu) \in p_\nu^{-1}\mathcal{C}_{M_\nu}(p_\nu^{-1}\Omega_\nu)$ が得られ，その制限により $(u'_1(x_1), u'_2(x_2)) \in p_1^{-1}\mathcal{C}_{M_1} \times p_2^{-1}\mathcal{C}_{M_2}(\Omega_1 \hat{\times} \Omega_2)$ を得る．よってこの準同型写像の像が $u_1(x_1)u_2(x_2) \in \mathcal{C}_M(\Omega_1 \hat{\times} \Omega_2)$ である．

［定理 3.1.2 の証明］ $\nu=1,2$ に対して $(x_\nu, \sqrt{-1}\xi_\nu\infty) \in \sqrt{-1}S^*M_\nu$, $u_\nu \in \mathcal{C}_{M_\nu,(x_\nu,\sqrt{-1}\xi_\nu\infty)}$ とする． 第 2 章命題 2.1.6 により $\pi^{-1}\mathcal{B} \xrightarrow{\mathrm{sp}} \mathcal{C}_M \to 0$（完全）が成り立つから，$f_1 \in \mathcal{B}_{x_1}$，$f_2 \in \mathcal{B}_{x_2}$ が存在して $u_1 = \mathrm{sp}(f_1)$，$u_2 = \mathrm{sp}(f_2)$ と表わせる．そこで $u_1(x_1)u_2(x_2) = \mathrm{sp}(f_1 \cdot f_2) \in \mathcal{C}_{M,((x_1,x_2),\sqrt{-1}(\xi_1,\xi_2)\infty)}$ と定義する．これが f_1, f_2 のとり方によらないことを示そう．実際 $u_1 = \mathrm{sp}(f_1) = \mathrm{sp}(\tilde{f}_1)$, $u_2 = \mathrm{sp}(f_2) = \mathrm{sp}(\tilde{f}_2)$ とすれば $f_1(x_1)f_2(x_2) - \tilde{f}_1(x_1)\tilde{f}_2(x_2) = f_1(x_1)(f_2(x_2) - \tilde{f}_2(x_2)) +$ $+ (f_1(x_1) - \tilde{f}_1(x_1))\tilde{f}_2(x_2)$ となる． ここで $\mathrm{sp}(f_2 - \tilde{f}_2) = u_2 - u_2 = 0$ 故，$(x_2, \sqrt{-1}\xi_2) \notin \widehat{\mathrm{S.S.}}(f_2(x) - \tilde{f}_2(x))$ を得る．他方定理 3.1.1 によって $\widehat{\mathrm{S.S.}}\,f_1(f_2 - \tilde{f}_2) \subset \widehat{\mathrm{S.S.}}\,f_1 \times \widehat{\mathrm{S.S.}}\,(f_2 - \tilde{f}_2)$ であったから $((x, x_2),\ \sqrt{-1}(\xi_1, \xi_2))$ $\notin \widehat{\mathrm{S.S.}}\,f_1(f_2 - \tilde{f}_2)$, 即ち， $(x_1,\ x_2, \sqrt{-1}(\xi_1, \xi_2)\infty)$ では $\mathrm{sp}f_1(f_2 - \tilde{f}_2) = 0$ である．同様にして $(x_1, x_2, \sqrt{-1}(\xi_1, \xi_2)\infty)$ において $\mathrm{sp}(f_1(x_1) - \tilde{f}_1(x_1))\tilde{f}_2(x_2) = 0$ が成立するから結局 $\mathrm{sp}f_1f_2 = \mathrm{sp}\tilde{f}_1\tilde{f}_2$ を得る． （証終）

注意． 定理 3.1.2 は各茎について局所的に示したが大域的に証明する場合には次のように行えばよい． まず $\mathcal{C}_{M_1}$ が U に $\mathcal{B}_{M_1}(\pi(U))/\mathcal{A}^*_{M_1}(U)$ を対応させて得られる前層に付随した層であることに注意し，次に

$$(\mathcal{B}_{M_1}(\pi(U_1))/\mathcal{A}^*_{M_1}(U_1)\times(\mathcal{B}_{M_2}(\pi(U_2))/\mathcal{A}^*_{M_2}(U_2))\to\mathcal{C}_{M_1\times M_2}(p_1{}^{-1}U_1\cap p_2{}^{-1}U_2)$$

なる写像をスペクトル写像 sp を用いて構成すればよい．

定義 3.1.3. N, M を実解析的多様体，$f: N\to M$ を実解析的写像とする．$N\underset{M}{\times}T^*M$ の点 (y,ξ) *) に対して T^*N の点 $(y, f^*(\xi))$ を対応させる写像 $\hat{\rho}$ の核を T^*_NM **) と記し，N に台を持つ**余法(ベクトル)束**と呼ぶ．

また，$(T^*_NM-N)/\boldsymbol{R}^\times_+$ を S^*_NM ***) と示す．明らかに $\sqrt{-1}S^*_NM$ は $N\underset{M}{\times}\sqrt{-1}S^*M$ の閉集合である． $N\underset{M}{\times}\sqrt{-1}S^*M-\sqrt{-1}S^*_NM$ から $\sqrt{-1}S^*N$ への写像 $\rho=\rho_f$，および $N\underset{M}{\times}\sqrt{-1}S^*M-\sqrt{-1}S^*_NM$ から $\sqrt{-1}S^*M$ への写像 $\varpi=\varpi_f$ を次のように定める．

$$\begin{cases}\rho((y,\sqrt{-1}\xi\infty))=(y,\sqrt{-1}f^*(\xi)\infty)\\ \varpi((y,\sqrt{-1}\xi\infty))=(f(y),\sqrt{-1}\xi\infty)\end{cases}$$

注意. 上に定義した二つの写像 ρ および ϖ は，本書においては，始終用いられる重要な写像である．なお，N が M の部分多様体であれば，定義より容易に判るように，ρ は全射的であり，ϖ は単射的である．(第2章第1節定義2.1.1参照.)

定理 3.1.3.(超函数の制限) N が M の部分多様体，ι を $N\hookrightarrow M$ なる埋め込み写像とする．$u\in\mathcal{B}_M(M)$ は M 上の超函数であって，$\mathrm{S.S.}u\cap\sqrt{-1}S^*_NM=$ $=\phi$ なる条件を満たしているとする．その時 u の N への制限 $u|_N\in\mathcal{B}_N$ が定義できて

$$\widehat{\mathrm{S.S.}}(u|_N)\subset\hat{\rho}(N\underset{M}{\times}\sqrt{-1}\,T^*M\cap\widehat{\mathrm{S.S.}}u)$$
$$\mathrm{S.S.}(u|_N)\subset\rho(N\underset{M}{\times}\sqrt{-1}S^*M\cap\mathrm{S.S.}u)$$

が成り立つ．

［証明］ X, Y をそれぞれ M, N の複素化とし，Y は X の部分多様体であるとする．$\mathrm{S.S.}u\subset\bigcup_j U_j$ となる U_j を，各 U_j は直線を含まない開錐であってしかも $U_j\cap\sqrt{-1}S^*_NM=\phi$ となるように選ぼう．その時

$[\rho(U_j\cap N\underset{M}{\times}\sqrt{-1}S^*M)]^\circ=U_j{}^\circ\cap\sqrt{-1}SN$ となる．何故ならば 左辺=

---

*) y は N の点を，ξ は $T^*_{f(y)}M$ の点を各々表わす．

**) f が埋め込み写像の時，これ等が第2章第1節定義2.1.1で定義したものに一致することは明らかであろう．

***) ここで $N=\{(y,\xi)\in N\underset{M}{\times}T^*M\,|\,y\in N,\ \xi=0\}\subset T^*_NM$ と見做した．

$\{x+\sqrt{-1}v0\in\sqrt{-1}SN|$ 任意の $(x,\sqrt{-1}\xi\infty)\in U_j\cap N\underset{M}{\times}\sqrt{-1}S^*M$ に対して $\langle v,\iota^*(\xi)\rangle>0\}=\{x+\sqrt{-1}v0\in\sqrt{-1}SN|$ 任意の $(x,\sqrt{-1}\xi\infty)\in U_j$ に対して $\langle v,\xi\rangle>0\}=$右辺となるからである. ここで $\langle v,\iota^*(\xi)\rangle=\langle\iota_*(v),\xi\rangle=\langle v,\xi\rangle$ に注意しよう. そして更に $\tau(U_j{}^\circ\cap\sqrt{-1}SN)=N$ が成り立つ. 何故ならば $x\in N$ かつ $x\notin\tau(U_j{}^\circ\cap\sqrt{-1}SN)$ なる x が存在すれば
$\rho(U_j\cap N\underset{M}{\times}\sqrt{-1}S^*M)^\circ\cap(\sqrt{-1}SN)_x=\phi$ および $\rho(U_j\cap N\underset{M}{\times}\sqrt{-1}S^*M)$ が凸であることより $\rho(U_j\cap N\underset{M}{\times}\sqrt{-1}S^*M)\cap(\sqrt{-1}S^*M)_x=(\sqrt{-1}S^*N)_x$を得る. よって $(x,\sqrt{-1}\xi\infty)\in U_j$, $(x,-\sqrt{-1}(\xi-2\xi')\infty)\in U_j$, 但し $\iota^*(\xi)\neq0$ かつ $\iota^*(\xi')=0$ なる $\xi,\xi'\in\sqrt{-1}\,T_x^*M-\{0\}$ が存在する. U_j は凸であったから $\frac{1}{2}\xi+\frac{1}{2}(-\xi-2\xi')=\xi'$ に注意すれば $(x,\sqrt{-1}\xi'\infty)\in U_j$ を得る. ところが $(x,\sqrt{-1}\xi'\infty)\in S_N^*M$ でもあるから, これは $U_j\cap\sqrt{-1}S_N^*M=\phi$ に反する. (逆に $(x,\sqrt{-1}\xi'\infty)\in U_j\cap\sqrt{-1}\,S_N^*M$ ならば $U_j{}^\circ\cap(\sqrt{-1}SN)_x=\phi$ となることが次のようにして判る：任意の$\xi\in T_x{}^*M$ に対して $\varepsilon>0$ を十分小さくとれば $(x,\sqrt{-1}(\varepsilon\xi+\xi')\infty)\in U_j$ であるから $\rho(U_j\cap N\underset{M}{\times}\sqrt{-1}S^*M)\cap(\sqrt{-1}S^*M)_x$ $=(\sqrt{-1}S^*N)_x$. 従ってその極集合は空となる.)

補題. D が $U(\subset\sqrt{-1}SM)$ の錐状近傍ならば, N の複素近傍 Y に対し $D\cap Y$ は $U\cap\sqrt{-1}SN$ の錐状近傍である.

［証明］ 局所的な話であるから $N=\{x_1=\cdots=x_r=0\}\subset M\subset\boldsymbol{R}^n$ としてもよい. D が $0+\sqrt{-1}(0,v_{r+1},\cdots,v_n)0\in\sqrt{-1}SM$ の錐状近傍ならば $|x|\ll1$, $0<t\ll1$, $|v-v_0|\ll1$ に対して $x+\sqrt{-1}tv\in D$ が成り立つ. これは
$|(x_{r+1},\cdots,x_n)|\ll1, 0<t\ll1$, $|(v'_{r+1},\cdots,v'_n)-(v_{r+1},\cdots,v_n)|\ll1$ ならば
$(0,x_{r+1},\cdots,x_n)+\sqrt{-1}(0,v'_{r+1},\cdots,v'_n)t\in D\cap Y$ を意味する. （証終）

さて $u\in\mathcal{B}_M(M)$ を $u=\sum_j b_{D_j}(f_j)$, 但し D_j は $U_j{}^\circ$ の錐状近傍で $f_j\in\mathcal{O}_X(D_j)$, と表わす時, 補題より $D_j\cap Y$ は $U_j{}^\circ\cap\sqrt{-1}SN$ の錐状近傍でしかも $\tau(U_j{}^\circ\cap\sqrt{-1}SN)=N$ である. よって $\sum_j b_{D_j\cap Y}(f_j|_Y)$ は N 上の超函数を定義するから$u|_N=\sum b_{D_j\cap Y}(f_j|_Y)$ とおけばよい. 他方, $U_j{}^\circ\cap\sqrt{-1}SN=$
$=\rho(U_j\cap\underset{M}{N}\times\sqrt{-1}S^*M)^\circ$ であるから第2章定理2.3.4により
$\mathrm{S.S.}(u|_N)\subset\bigcup_j\rho(U_j\cap N\underset{M}{\times}\sqrt{-1}S^*M)$ となり, これより $\mathrm{S.S.}(u|_N)\subset$
$\rho(N\underset{M}{\times}\sqrt{-1}S^*M\cup\mathrm{S.S.}u)$ を得る. 従って $\mathrm{Supp}(u|_N)\subset N\cap\mathrm{Supp}\,u$ であるから $\widehat{\mathrm{S.S.}}(u|_N)\subset\hat{\rho}(N\underset{M}{\times}\sqrt{-1}S^*M\cap\widehat{\mathrm{S.S.}}u)$ が成立する. （証終）

定義 3.1.4. X, Yを位相空間 $f: X\to Y$を連続写像, $\mathscr{F}$をX上の層とする. この時一般に $\Gamma_{f-pr}(X, \mathscr{F})$ を$\{s\in\Gamma(X,\mathscr{F}) \mid f|_{\mathrm{Supp}(s)}$ は固有写像$\}$により定義する. この記号を用いて Yの開集合 Uに $\Gamma_{f-pr}(f^{-1}(U), \mathscr{F})$ を対応させて得られる Y 上の層を $f_!(\mathscr{F})$ と記す. 一般に $0\to\mathscr{F}\to\mathscr{L}^\cdot$ を $\mathscr{F}$ の脆弱分解として, Yの開集合 Uに $H^k(\Gamma_{f-pr}(f^{-1}(U), \mathscr{L}^\cdot))$ を対応させて得られる層を $R^kf_!(\mathscr{F})$ と記す.

注意. $R^0f_!(\mathscr{F})=f_!(\mathscr{F})$ である. 又, f 自身が固有写像なら $R^kf_!(\mathscr{F})= =R^kf_*(\mathscr{F})$ となる.

定理 3.1.4. (Microfunction の制限) Nを Mの部分多様体とする. その時,

$$\rho_!\varpi^{-1}\mathscr{C}_M \longrightarrow \mathscr{C}_N$$

なる準同型写像が存在する.

［証明］ Uを $\sqrt{-1}S^*N$の開集合とする. $W(\subset N)$を$\pi_N(U)$の近傍として

$$G_1(W, U)=\{s\in\mathscr{B}_M(W) \mid \mathrm{S.S.}s\cap\sqrt{-1}S^*_NM=\phi\},$$

$$G_2(W, U)=\{s\in\mathscr{B}_M(W) \mid \mathrm{S.S.}s\cap\rho^{-1}(U)=\phi, \mathrm{S.S.}s\cap\sqrt{-1}S^*_NM=\phi\}$$

と定め

$$G(W, U)=G_1(W, U)/G_2(W, U)$$

とおく. この時 Uに $\varinjlim_{W\supset\pi_N(U)} G(W, U)$を対応させて得られる前層に付随した層が $\rho_!\varpi^{-1}\mathscr{C}_M$ であることを示そう. その為に $G(W, U)$ から $\Gamma(U, \rho_!\varpi^{-1}\mathscr{C}_M) =\{s\in\Gamma(\rho^{-1}(U), \varpi^{-1}\mathscr{C}_M) \mid \rho|_{\mathrm{Supp}s}$ は固有写像$\}$ への写像を $s\in\mathscr{B}_M(W)$ に対して $\mathrm{sp}(s)$ を対応させることによって定義する. まず $\mathrm{sp}(s)$ が $\Gamma(U, \rho_!\varpi^{-1}\mathscr{C}_M)$ の元を定義することを示そう. $\mathrm{sp}(s)\in\mathscr{C}_M(\pi_M^{-1}(W))$ であるから $\mathrm{sp}(s)\in\Gamma(\rho^{-1}(U), \varpi^{-1}\mathscr{C}_M)$ と考えることができる. そこで $\rho|_{\mathrm{Supp}\ \mathrm{sp}(s)\cap\rho^{-1}(U)}$ が固有写像になることを示せばよい.

右図 3.3.1において $N\times_M\pi_M^{-1}(W)\to W\cap N$ なる写像は固有写像であり, また

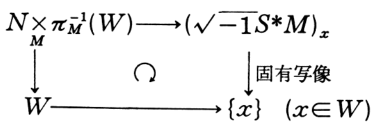


図 3.3.1.

$\mathrm{Supp}\,\mathrm{sp}(s)\cap N\times_M\pi_M^{-1}(W)$ は $N\times_M\pi_M^{-1}(W)$ の閉集合であるから $\mathrm{Supp}\,\mathrm{sp}(s)\cap N\times_M\pi_M^{-1}(W)\to W$ は固有写像である.

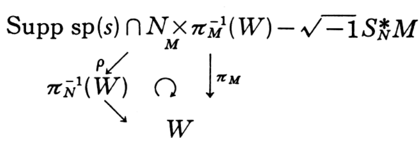


図 3.3.2.

$\mathrm{Supp}\,\mathrm{sp}(s)\cap\sqrt{-1}S^*_NM=\phi$ であるから結局

$$\mathrm{Supp}\,\mathrm{sp}(s)\cap N\underset{M}{\times}\pi_M^{-1}W)-\sqrt{-1}S_N^*M\to W$$

が固有写像であることが判る．従って

$$\rho:\mathrm{Supp}\,\mathrm{sp}(s)\cap(N\underset{M}{\times}\pi_M^{-1}(W)-\sqrt{-1}S_N^*M)\longrightarrow\pi_N^{-1}(W)$$

が固有写像であることを言うのには次の補題を示せばよい．

補題 1. $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z$ において f,g は連続，Y はハウスドルフ空間とする．その時 $g\circ f$ が固有写像ならば f は固有写像である．

［証明］ まず，右図の可換図式を考えよう．ここで仮定により $g\circ f$ は固有写像であるから，$\tilde{f}:X\underset{Z}{\times}Y\to Z\underset{Z}{\times}Y$ （但し $\tilde{f}(x,y)\underset{\mathrm{def}}{=}(g\circ f(x),\ y)=(g(y),\ y)$）は固有写像である．よって $\iota(x)=(x,f(x))$ によって $X\hookrightarrow X\underset{Z}{\times}Y$ なる埋め込み写像を定義する時，$\iota(X)$ が $X\underset{Z}{\times}Y$ の閉集合であることを言えば十分である．

$$\begin{array}{ccccc} X & \hookrightarrow & X\underset{Z}{\times}Y & \longrightarrow & X \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{f}} & & \downarrow{\scriptstyle g\circ f} \\ Y & = & Z\underset{Z}{\times}Y & \longrightarrow & Z \end{array}$$

今 $(x,y)\in X\underset{Z}{\times}Y$ が $\iota(X)$ に含まれていないとすれば $y\neq f(x)$ である．然るに Y はハウスドルフ空間だから $f(x)\in U,y\in V$ かつ $U\cap V=\phi$ となるような開集合 U,V が存在する．このような U,V に対して (x,y) の近傍 $f^{-1}(U)\underset{Z}{\times}V$ は X と交わらない．従って X は閉集合である．故に $f=\tilde{f}|_X$ であるから f は固有写像である． （補題の証終）

この補題により ρ を $\rho^{-1}(U)\cap\mathrm{Supp}\,\mathrm{sp}(s)$ に制限してもやはり固有写像であるから $\mathrm{sp}(s)\in\Gamma(U,\rho_!\varpi^{-1}\mathcal{C}_M)$ である．$s\in\mathcal{B}_M(W)$ かつ $\mathrm{S.S.}s\cap\rho^{-1}(U)=\phi$ ならば $\rho^{-1}(U)$ 上で $\mathrm{sp}(s)=0$ であるからこの対応により well-defined な写像を得る．逆に，$\rho^{-1}(U)$ 上で $\mathrm{sp}(s)=0$ ならば s は $G(W,U)$ の元としては 0 であるからこの写像は単射的である．あとは各茎毎にこの写像が全射になることを示せばよい．第 2 章命題 2.1.4 の系と同様にして $(\rho_!\varpi^{-1}\mathcal{C}_M)_p=\{s\in\Gamma(\rho^{-1}(p),\varpi^{-1}\mathcal{C}_M)|$ $\mathrm{Supp\ sp}\,(s)$ はコンパクト$\}$ （但し $p\in\sqrt{-1}S^*N$）が成り立つことにまず注意しよう．ここで $\pi_N(p)=x$ と $x\in N$ を定める．すると $s\in(\rho_!\varpi^{-1}\mathcal{C}_M)_p$ に対して $F\underset{\mathrm{def}}{=}\rho^{-1}(p)\cup(\sqrt{-1}S_N^*M)_x$ 上の $\mathcal{C}_M$ の断面 $\tilde{s}$ を $\tilde{s}|_{\rho^{-1}(p)}=s$，$\tilde{s}|_{\sqrt{-1}S_N^*M}=0$ となるように定義することにより $\Gamma(F,\mathcal{C}_M|_F)$ の元を得る．ここで $\rho^{-1}(p)$ は $(\sqrt{-1}S^*M)_x-(\sqrt{-1}S_N^*M)_x$ の閉集合であるから F は $(\sqrt{-1}\,S^*M)_x=\pi_M^{-1}(x)$ の閉集合である．さて，そこで，次の補題が成り立つことに注意しよう．

補題 2. F を $\pi^{-1}(x)$ の閉集合とすれば

$$\Gamma(\pi^{-1}(x),\mathcal{C}_M|_{\pi^{-1}(x)})\longrightarrow\Gamma(F,\mathcal{C}_M|_F)$$

なる制限写像は全射的である．

証明は後回しにしてこの補題を認めれば $\mathcal{B}_x \to \Gamma(\pi^{-1}(x), \mathcal{C}_M|_{\pi^{-1}(x)})$ なる写像は全射的であるから $u \in \mathcal{B}_x$ で $\tilde{s} \in \Gamma(F, \mathcal{C}_M|_F)$ へ写るものが存在する．$\tilde{s}$ の作り方より $\rho^{-1}(p)$ 上で $\mathrm{sp}(u)=s$ かつ $\mathrm{S.S.}u \cap \sqrt{-1}S_N^*M=\phi$ が成立する．従って，$\{U \mapsto \varinjlim_{W \supset \pi_N(U)} G(W, U)\}$ なる対応により得られる前層の層化が $\rho_! \varpi^{-1}\mathcal{C}_M$ であることが示された．

そこで $\mathrm{S.S.}s \cap \sqrt{-1}S_N^*M=\phi$ なる $s \in \mathcal{B}_M(W)$ に対して $\mathrm{sp}(s|_N) \in \mathcal{C}_N$ を対応させれば $\rho_! \varpi^{-1}\mathcal{C}_M \to \mathcal{C}_N$ なる準同型写像を得ることになる．

最後に補題2の証明を与えよう．

［補題2の証明］ $p \in F$ に対して $\mathcal{B}_x \to \mathcal{C}_{M,p}$ は全射的だから $s \in \Gamma(F, \mathcal{C}_M|_F)$ に対し $u_j \in \mathcal{B}_x$ で $\mathrm{sp}(u_j)|_{U_j \cap F}=s$ となるような U_j で F を覆うことができる．F はコンパクトであるから $F \subset \bigcup_{i=1}^{N} U_i$ と仮定して構わない．ここで N に関する帰納法により補題を証明しよう．$N=1$ ならば明らかである．$N-1$ まで正しいとすると $F-U_N \subset \bigcup_{j=1}^{N-1} U_j$ であるから $u \in \mathcal{B}_x$ で，$F-U_N$ のある近傍 $\overline{V}$ に対し $\overline{V}$ 上で $\mathrm{sp}(u)=s$ となるものが存在する．そうすれば $F \subset U_N \cup V$ であるから，証明は $N=2$ の場合に帰着される．$N=2$ の時 $\mathrm{S.S.}(u_1-u_2) \subset \complement\overline{U}_1 \cup \complement\overline{U}_2 \cup \complement F$ ($\complement A$ は A の補集合）であるから $u_1-u_2=w-w_2+t$，但し $\mathrm{S.S.}w_1 \subset \complement\overline{U}_1$，$\mathrm{S.S.}w_2 \subset \complement\overline{U}_2$, $\mathrm{S.S.}t \subset \complement F$，と表わせる．そこで $u \underset{\mathrm{def}}{=} u_1-w_1=u_2-w_2+t$ と定めると

$$\mathrm{sp}\,u|_{U_1 \cap F}=\mathrm{sp}\,u_1|_{U_1 \cap F}=s|_{U_1 \cap F},$$
$$\mathrm{sp}\,u|_{U_2 \cap F}=\mathrm{sp}\,u_2|_{U_2 \cap F}=s|_{U_2 \cap F}$$

となり $\mathrm{sp}(u)|_F=s$ が成立して求める結果が得られる． （補題2の証終）

これにより定理3.1.4の証明が完了したことになる． （証終）

次に同一の多様体上の超函数の積を論じよう．

定理 3.1.5. (超函数の積) $u(x), v(x)$ を実解析的多様体 M 上の二つの超函数であって $\mathrm{S.S.}u \cap (\mathrm{S.S.}v)^a=\phi$ を満たすものとする．この時 $u(x)$ を $v(x)$ の積 $u(x)v(x) \in \mathcal{B}(M)$ が定義できて

$$\widehat{\mathrm{S.S.}}(uv) \subset \{(x, \sqrt{-1}(\xi_1+\xi_2)) \mid (x, \sqrt{-1}\xi_1) \in \widehat{\mathrm{S.S.}}u, (x, \sqrt{-1}\xi_2) \in \widehat{\mathrm{S.S.}}v\}$$

および

$\mathrm{S.S.}(uv) \subset \{(x, \sqrt{-1}(\theta\xi_1+(1-\theta)\xi_2)\infty) \mid (x, \sqrt{-1}\xi_1\infty) \in \mathrm{S.S.}u,\ (x, \sqrt{-1}\xi_2\infty)$

$\in$S.S.v, $0\leqq\theta\leqq 1\}\cup$S.S.$u\cup$S.S.$v$ が成立する．但し，ここで $a:\sqrt{-1}S^*M\to\sqrt{-1}S^*M$ は対蹠点写像（即ち$a(x,\sqrt{-1}\xi\infty)=(x,-\sqrt{-1}\xi\infty)$）であり，(S.S.$v)^a$ は S.S.v の a による像とした．

［証明］ まず定理 3.1.1 により $M\times M$ 上の超函数 $u(x_1)v(x_2)$ を定義できることは明らかである．次に $x\in M$ に対して $\iota(x)=(x,x)\in M\times M$ なる写像ιにより M を $M\times M$ の部分集合と見て $u(x)v(x)\underset{\text{def}}{=}u(x_1)v(x_2)|_M$ と定義する．定理 3.1.3 により S.S.$(u(x_1)v(x_2))\cap\sqrt{-1}S^*_M(M\times M)=\phi$ であればこの制限操作が可能である．

そこで S.S.$(u(x_1)v(x_2))\cap\sqrt{-1}S^*_M(M\times M)=\phi$ を確かめよう．

まず定理 3.1.1 により

$$\widehat{\text{S.S.}}u(x_1)v(x_2)\subset\{(x_1,x_2,\sqrt{-1}(\xi_1,\xi_2))\in\sqrt{-1}\,T^*(M\times M)\,\big|\,(x_1,\sqrt{-1}\xi_1)\in\widehat{\text{S.S.}}u \text{ かつ } (x_2,\sqrt{-1}\xi_2)\in\widehat{\text{S.S.}}v\}$$

が成り立つ．他方，τ: $M\to M\times M$ から誘導される

$$\hat{\rho}:\ M\underset{M\times M}{\times}\sqrt{-1}\,T^*(M\times M)\to\sqrt{-1}\,T^*M$$

の核 $\sqrt{-1}\,T^*_M(M\times M)$は，容易に判るように，$\{(x_1,x_2,\sqrt{-1}(\xi_1,\xi_2))\,|\,x_1=x_2$ かつ $\xi_1+\xi_2=0\}$ である*)．然るに，定理の仮定により，S.S.$u\cap$(S.S.$v)^a=\phi$ であるから $\widehat{\text{S.S.}}u(x_1)v(x_2)\cap\sqrt{-1}\,T^*_M(M\times M)=\phi$，従ってS.S.$(u(x_1)v(x_2))\cap\sqrt{-1}S^*_M(M\times M)=\phi$ が成立する．よって定理 3.1.1 が適用できて，$u(x)v(x)$ が定義される．

注意 1. 定理 3.1.5 は次のように直接に証明することもできる：$u,v\in\mathcal{B}(M)$ かつ S.S.$u\cap$(S.S.$v)^a=\phi$ とする時，有限個の固有的に凸な閉集合 U_j, V_k を

$$\begin{cases}\text{S.S.}u\subset\cup\, U_j\\ \text{S.S.}v\subset\bigcup_k V_k\\ \qquad\text{かつ}\\ U_j\cap V_k{}^a=\phi\end{cases}$$

となるように選ぶことができる．次に D_j を $U_j{}^\circ$ の錐状近傍．D'_kを $V_k{}^\circ$ の錐状近傍とする．ここで $u=\sum_j b_{D_j}(\varphi_j)$, $v=\sum_k b_{D'_k}(\varphi_k{}')$ と表わす時 $\tau(U_j{}^\circ\cap V_k{}^\circ)=M$ が言えれば $D_j\cap D'_k$ は $U_j{}^\circ\cap V_k{}^\circ$ の錐状近傍でありしかも $\varphi_j\cdot\varphi'_k$

*) この場合 $\hat{\rho}((x,x,\sqrt{-1}(\xi_1,\xi_2)))=(x,\sqrt{-1}(\xi_1+\xi_2))$ であることに注意．

$\in\mathcal{O}(D_j\cap D'_k)$ となる．従って $b_{D_j\cap D'_k}(\varphi_j\cdot\varphi'_k)$ は M 上の超函数を定義するから $u\cdot v=\sum_{j,k}b_{D_j\cap D'_k}(\varphi_j\cdot\varphi'_k)$ とすればよい．もし M の点 x であって $U_j^\circ\cap V_k^\circ\cap(\sqrt{-1}SM)_x=\phi$ なるものが存在するとすれば，$(U_j^\circ\cap V_k^\circ)=(U_j\cup V_k)^\circ$ であるから $(U_j\cup V_k)^\circ\cap(\sqrt{-1}SM)_x=\phi$ となる．これは $(x,\sqrt{-1}\xi\infty)\in U_j\cup V_k$ かつ $(x,-\sqrt{-1}\xi\infty)\in U_j\cup V_k$ なる ξ が存在することと同等であり，U_j, V_k はいずれも固有的に凸であるから $(x,\sqrt{-1}\xi\infty)\in U_j$ ならば $(x,-\sqrt{-1}\xi\infty)\in V_k$，即ち $(x,\sqrt{-1}\xi\infty)\in U_j\cap V_k^a\neq\phi$ となり仮定に反する．従って $\tau(U_j^\circ\cap V_k^\circ)=M$ である．このようにして積を直接に定義することができた．

注意 2. 定理 3.1.5 の仮定のもとで交換法則 $u(x)v(x)=v(x)u(x)$ が成り立つことは明らかであるけれども，結合法則 $(u_1(x)u_2(x))u_3(x)=u_1(x)(u_2(x)u_3(x))$ はたとえ両辺が各々 well-defined であっても一般には成り立たない．例えば $u_1(x)=\dfrac{1}{x+i0}$, $u_2(x)=x$, $u_3(x)=\delta(x)$ とすれば $(u_1u_2)u_3=\delta(x)$, $u_1(u_2u_3)=0$ となる．

一般に $\mathrm{S.S.}(u_j)=Z_j$ $(1\leqq j\leqq 3)$ とした時，$Z_1\cap Z_2{}^a=\phi$ であれば積 u_1u_2 が定義され $Z_1+Z_2=\{(x,\sqrt{-1}(\xi_1+\xi_2)\infty)\mid(x,\sqrt{-1}\xi_1\infty)\in Z_1\ (x,\sqrt{-1}\xi_2\infty)\in Z_2\}$ が意味を持つが，更に $(Z_1+Z_2)^a\cap Z_3=\phi$ であれば結合律が成り立つ．実際，この時には注意 1 の方法で $u_i=\sum_j b_{D_{ij}}(f_{ij})(1\leqq i\leqq 3)$ と表わした時 $b_{D_{1i}\cap D_{2j}\cap D_{3k}}(f_{1i}\cdot f_{2j}\cdot f_{3k})$ が M 上の超函数を定め，従って $(u_1\cdot u_2)\cdot u_3=\sum_{i,j,k}b_{D_{1i}\cap D_{2j}\cap D_{3k}}(f_{1i}\cdot f_{2j}\cdot f_{3k})=u_1(u_2u_3)$ を得る．

注意 3. ここで定義された超函数の積(或いは定理 3.1.3 で定義された超函数の制限)は，微分作用素の作用に対して安定であることが著しい特性である．例えば $u(x)$ と $v(x)$ が共に M 上の連続函数であれば，$u(x)v(x)$ という積は(連続函数として，従って超函数として) 常に定義可能であるが，$u(x)$ に微分作用素 $P(D)$ を作用させて得られる $P(D)u(x)$ という超函数は連続函数とは限らないから，$P(D)u(x)$ と $v(x)$ の積が定義できるかどうかは判らない．

定理 3.1.6. (Microfunction の積) M を実解析的多様体とし，$\varDelta_M$ を $M\times M$ の対角線集合とする．この時

$$N=\varDelta_M\underset{M\times M}{\times}(\sqrt{-1}S^*(M\times M))-\varDelta_M\underset{M\times M}{\times}(M\times\sqrt{-1}S^*M)-\varDelta_M\underset{M\times M}{\times}(\sqrt{-1}S^*_M M\times M)-\sqrt{-1}S^*_M(M\times M)$$

と定める．Nの点 $z=(x,x,\sqrt{-1}(\xi_1,\xi_2)\infty)$ （但し $\xi_1\neq 0$, $\xi_2\neq 0$, $\xi_1+\xi_2\neq 0$）に対して $p_1(z)=(x,\sqrt{-1}\xi_1\infty)\in\sqrt{-1}S^*M$, $p_2(z)=(x,\sqrt{-1}\xi_2\infty)\in\sqrt{-1}S^*M$, および $q(z)=(x,\sqrt{-1}(\xi_1+\xi_2)\infty)\in\sqrt{-1}S^*M$ により写像 p_1, p_2 および q を定義すれば，

$$q_!(p_1^{-1}\mathcal{C}_M\times p_2^{-1}\mathcal{C}_M)\longrightarrow\mathcal{C}_M$$

なる準同型写像が存在する．

［証明］ まず定理 3.1.2 を用いて，$p_1^{-1}\mathcal{C}_M\times p_2^{-1}\mathcal{C}_M\to\mathcal{C}_{M\times M}|_N$ なる準同型写像を得る．他方，定理 3.1.4 によって $q_!(\mathcal{C}_{M\times M}|_N)\to\mathcal{C}_M$ なる準同型写像が存在するから，この二つの準同型写像を組み合わせることにより，求める準同型写像を得る．（証終）

最後に代入操作について論じよう．N, M を実解析的多様体，$f\colon N\to M$ を smooth (即ち，各 $y\in N$ に対して $T_yN\xrightarrow{f_*}T_{f(y)}M$ が全射的) な実解析写像とする．Y, X を各々 N, M の複素化としてfを $Y\to X$ へ拡張する．その時 $u\in\mathcal{B}_M(M)$ に対して $u(f(x))=f^*u\in\mathcal{B}_N(N)$ が定義されることを示そう．

定理 3.1.7. (1)(超函数に対する代入操作) $f\colon N\to M$ が smooth であれば

$$f^*\colon f^{-1}\mathcal{B}_M\longrightarrow\mathcal{B}_N$$

なる準同型写像が存在する．

更にこの時，$\hat{\rho}\colon N\underset{M}{\times}(\sqrt{-1}\,T^*M)\to\sqrt{-1}\,T^*N$ なる写像を $\hat{\rho}((y,\sqrt{-1}\xi))=(y,\sqrt{-1}f^*(\xi))$ により，又 $\hat{\varpi}\colon N\underset{M}{\times}(\sqrt{-1}\,T^*M)\to\sqrt{-1}\,T^*M$ なる写像を $\hat{\varpi}((y,\sqrt{-1}\xi))=(f(y),\sqrt{-1}\xi)$ により各々定める時(定義 3.1.3 参照)，

$$\widehat{\mathrm{S.S.}}(f^*u)=\hat{\rho}\hat{\varpi}^{-1}(\widehat{\mathrm{S.S.}}u)$$

および

$$\mathrm{S.S.}(f^*u)=\rho\varpi^{-1}(\mathrm{S.S.}u)$$

が成立する*)

(2) (Microfunction に対する代入操作) $f^*\colon\varpi^{-1}\mathcal{C}_M\to\mathcal{H}^0_{N\underset{M}{\times}\sqrt{-1}S^*M}(\mathcal{C}_N)$ なる準同型写像が存在する．

［証明］ まず次の補題を証明しよう．

補題. $D(\subset X-M)$ を $U(\subset\sqrt{-1}SM)$ の錐状近傍とする．その時 f が

*) f が smooth であるから ρ も $\hat{\rho}$ も単射的である．

smooth ならば $f^{-1}(D)$ は $(f_*)^{-1}U=\{y+\sqrt{-1}v0\in\sqrt{-1}SN\mid f(y)+\sqrt{-1}f_*v0\in U\}$ の錐状近傍である．

［証明］　局所的な問題であり，f は smooth であるから $M=\boldsymbol{R}^n$, $N=\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^l$ と仮定しても構わない．

また，$(x,y)+\sqrt{-1}v0=0+\sqrt{-1}(\xi,\eta)0$ と仮定しても構わない．さて今，D が $0+\sqrt{-1}\xi 0$ の錐状近傍であるとすれば，定義により $|x|\ll 1$, $0<t\ll 1$ かつ $|\xi'-\xi|\ll 1$ なる限り，$x+\sqrt{-1}t\xi'\in D$ が成立する．他方，適当な (ξ,η) 対して，$|x|\ll 1$, $|y|\ll 1$, $0<t\ll 1$, $|\xi'-\xi|\ll 1$ かつ $|\eta'-\eta|\ll 1$ ならば $(x,y)+\sqrt{-1}t(\xi',\eta')\in\tilde{D}$ が成り立つ，とすれば，$\tilde{D}$ は $0+\sqrt{-1}(\xi,\eta)0$ の錐状近傍である．従って $\tilde{D}=f^{-1}(D)$ として，今選んだ座標系の特殊性を用いれば，主張は明らかである．　　　　　（補題の証終）

さて定理の証明に戻ろう．まず $u\in\mathcal{B}(M)$ に対して，有限個の，固有的に凸な閉集合 U_j を $\mathrm{S.S.}u\subset\bigcup_j U_j$ が成り立つように選ぶ．D_j を $U_j{}^\circ(\subset\sqrt{-1}SM)$ の錐状近傍とする．今 $u=\sum_j b_{D_j}(\varphi_j)$ と表わした時，$f^{-1}(D_j)$ は $((f_*)^{-1}U_j)^\circ$*) の錐状近傍であるから，$b_{f^{-1}(D_j)}(\varphi_j\circ f)$ は N 上の超函数を定義する．従って $f^*u=\sum_j b_{f^{-1}D_j}(\varphi_j\circ f)$ と定めれば求めるものが得られる．

次に f^*u の特異性スペクトルを調べよう．その為には $((f_*)^{-1}U_j)^\circ\subset\rho\varpi^{-1}U_j{}^\circ$ が成り立つことを示せばよい．実際これが言えれば，$\mathrm{S.S.}(f^*u)\subset\rho\varpi^{-1}(\mathrm{S.S.}u)$ が得られるからである．ここで $W=\mathrm{Ker}(f_*: TN\to N\times_M TM)$ と定義しよう．今，$(x,\sqrt{-1}\xi\infty)\in((f_*)^{-1}U_j)^\circ(\subset\sqrt{-1}S^*N)$ とすれば，$f(x)+\sqrt{-1}f_*(v)0\in U_j$ となる任意の v に対して $\langle\xi,v\rangle>0$ であるから，任意の $w\in W$ と任意の $a\in\boldsymbol{R}^\times$ に対して $\langle\xi,v+aw\rangle=\langle\xi,v\rangle+a\langle\xi,w\rangle>0$ が成立する．従って $\langle\xi,w\rangle=0$ となり $\xi\in W^\perp=\rho(N\times_M T^*M)$ を得る．従って $\xi=\rho(\xi')$ となる $\xi'\in T^*_{f(x)}M$ が存在する．然るに，この時 $f(x)+\sqrt{-1}f_*(v)0\in U_j$ となる任意の v に対して $\langle\xi,v\rangle=\langle\rho(\xi'),v\rangle=\langle\xi',f_*(v)\rangle>0$ が成立する．しかも f_* は全射的であるから，$\xi'\in\varpi^{-1}U_j{}^\circ$，即ち $(x,\sqrt{-1}\xi\infty)\in\rho\varpi^{-1}U_j{}^\circ$ を得る．

次に $\mathrm{S.S.}(f^*u)\supset\rho\varpi^{-1}(\mathrm{S.S.}u)$ を示そう．局所的な話だから $N=M\times L$, f は M への射影としても構わない．$x_0\in L$ に対して $f^*u|_{M\times\{x_0\}}=u$ となる．実際，

*)　$f_*: TN\to N\times_M TM$ は $\rho: N\times_M T^*M\to T^*N$ の転置写像である．

それは u を正則函数の境界値で表わしてみれば明らかである．そうすれば定理 3.1.3 によって $q_{x_0}\colon (M\times\{x_0\})\underset{M\times L}{\times}\sqrt{-1}\,T^*(M\times L)\to\sqrt{-1}\,T^*(M\times\{x_0\})$ なる写像を用いて $\widehat{\mathrm{S.S.}}u\subset q_{x_0}(\widehat{\mathrm{S.S.}}\,f^*u)$ を得る．従って $x_0\in L$ を動かすことにより $L\times\widehat{\mathrm{S.S.}}u\subset\widehat{\mathrm{S.S.}}(f^*u)$ と考えることができる．一方，定義により，$\hat{\rho}\hat{\varpi}^{-1}\widehat{\mathrm{S.S.}}u=L\times\widehat{\mathrm{S.S.}}u$ と見做すことができるから，結局 $\hat{\rho}\hat{\varpi}^{-1}\widehat{\mathrm{S.S.}}u\subset\mathrm{S.S.}(f^*u)$ を得る．

以上により $\widehat{\mathrm{S.S.}}(f^*u)=\hat{\rho}\hat{\varpi}^{-1}(\widehat{\mathrm{S.S.}}u)$ および $\mathrm{S.S.}(f^*u)=\rho\varpi^{-1}(\mathrm{S.S.}u)$ を得て(1)が証明されたことになる．

(2)については

$$\mathcal{B}_{M,\,f(y)}\xrightarrow{\mathrm{sp}}\mathcal{C}_{M,(f(y),\sqrt{-1}\xi\infty)}$$

および

$$\mathcal{B}_{N,\,y}\xrightarrow{\mathrm{sp}}\mathcal{H}^0_{\sqrt{-1}S^*M\underset{M}{\times}N}(\mathcal{C}_N)_{(y,\,\sqrt{-1}f^*(\xi)\infty)}$$

が共に全射的であると云う事実と，超函数に対する代入操作 $f^*\colon\mathcal{B}_{M,f(y)}\to\mathcal{B}_{N,y}$，とを用いることにより次の準同型写像

$$\mathcal{C}_{M,(f(y),\sqrt{-1}\xi\infty)}\longrightarrow\mathcal{H}^0_{\sqrt{-1}S^*M\underset{M}{\times}N}(\mathcal{C}_N)_{(y,\,\sqrt{-1}(f^*\xi)\infty)}$$

を得る．この準同型写像が sp の逆像のとり方によらずに定義できることも容易に確かめ得る．　(証終)

注意．$f\colon N\to M$ を smooth な実解析的写像，$\mathcal{X}$ を N のベクトル場 (vector field) とする．$\mathcal{X}$ が f の各ファイバーに接していれば(即ち，M 上の任意の函数 φ に対して $\mathcal{X}(\varphi\circ f)=0$ が成立していれば)，$u\in\mathcal{B}(M)$ に対して $\mathcal{X}(f^*u)=0$ が成り立つ．実際 $u=\sum_j b(\varphi_j)$ とすれば $\mathcal{X}(f^*u)=\mathcal{X}(\sum_j b(\varphi_j\circ f))=\sum_j b(\mathcal{X}(\varphi_j\circ f))=0$ となる．

以下，上に説明した制限，積，代入の操作を幾つかの具体例に適用してみよう．

例 3.1.1．$\delta(t)$ を一変数の δ 函数，$f(x_1,\cdots,x_n)$ を $U\subset\boldsymbol{R}^n$ で定義された，実数値実解析函数であって次の条件(3.1.1)を満たすとする．

(3.1.1)　$f(x)=0$ ならば，$d_xf(x)\neq0$

この時，$f^*\delta(t)$ は $\mathcal{B}_{\boldsymbol{R}^n}(U)$ の元として well-defined である．更に

(3.1.2)　$\mathrm{S.S.}\ f^*\delta(t)\subset\{(x,\sqrt{-1}\xi\infty)\in\sqrt{-1}S^*U\mid\ f(x)=0,\ \ \xi=c\,\mathrm{grad}_xf(x)\ (c\in\boldsymbol{R}-\{0\})\}$

が成立する．

実際，$\delta(t)$ が $\{t=0\}$ の外では0故，適当な $\boldsymbol{R}$ の原点の近傍 V をとれば，条件(3.1.1)より $f^{-1}(V)$ から V への写像として f が smooth になることを用いて，定理3.1.7を適用すれば $f^*\delta(t)$ が well-defined であって(3.1.2)を満たすことは見易い．

なおこの場合，$f^*\delta(t)$ を $\delta(f(x))$ と記すことが多い．

例 3.1.2. $f(x)$ は例3.1.1におけるものとする．この時 $f^*\dfrac{1}{t+\sqrt{-1}0}$ も上と同様にして well-defined である．これを $\dfrac{1}{f(x)+\sqrt{-1}0}$ と記すこともある．また上と同様にして

(3.1.3.) $\quad \text{S.S.}\left(\dfrac{1}{f(x)+\sqrt{-1}0}\right)\subset\{(x,\sqrt{-1}\xi\infty)\in\sqrt{-1}S^*M\,|\,f(x)=0,$
$\qquad \xi=c\,\mathrm{grad}_x f(x)\,(c>0)\}$

が得られる．なお，この時，W を十分小さい U の Stein 近傍として $D\underset{\text{def}}{=}W-\{z\in W\mid \mathrm{Im}f(z)\leqq 0\}$ なる領域からの $1/f(z)$ の境界値 $b_D(1/f(z))$ がここで定義した $\dfrac{1}{f(x)+\sqrt{-1}0}$ に一致することも定理3.1.7の証明より明らかである(定理2.3.4も参照)．

例 3.1.3. U を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合，$H=\{x\in U\,|\,h(x)=0\}$ を非特異超曲面とする．(即ち，h は実数値実解析函数であって H 上 $dh\neq 0$ を満たす.)今 $f(x)$ は例3.1.1におけるものとし，更に，次の条件(3.1.4)も満たしているとする．

(3.1.4) $\quad H\cap\{f=0\}$ 上で $\mathrm{grad}_x h \not\parallel \mathrm{grad}_x f$

この時 $\delta(f(x))$ の H への制限 $\delta(f(x))|_H$ は $\mathcal{B}_H(H)$ の元として well-defined であり，$(f|_H)^*\delta(t)\equiv\delta(f(x)|_H)$ に等しい．さて，この時

(3.1.5) $\quad 0\longrightarrow T_H^*U\longrightarrow T^*U\underset{U}{\times}H\longrightarrow T^*H\longrightarrow 0$

なる完全系列により，T^*H の点は，$(x,\xi)\in U\times\boldsymbol{R}^n$ $(\cong T^*U)$ を $\{(x,\xi)\,|\,h(x)=0,\ \xi=c\,\mathrm{grad}_x h(x)\ (c\in\boldsymbol{R})\}$ を法として考えたものによって表わされる*)．この表現法を用いれば，

---

*) より一般に H を $U\subset\boldsymbol{R}^n$ の部分多様体としても事態は変わらない．なお，ここで T_H^*U は H に台を持つ余法束を，$T^*U\underset{U}{\times}H$ は T^*U と H の U 上のファイバー積を，各々，表わすのであった．(第2章定義2.1.1)．なお，$\boldsymbol{R}^n$ の部分多様体 H に対し，T^*H の点をこのように，$T^*\boldsymbol{R}^n$ の点を代表元として表示することは応用上便利であり，しばしば用いられる．

(3.1.6)　$\mathrm{S.S.}(\delta(f(x))|_H)\subset A/B$

ここで

$$A=\{(x,\sqrt{-1}\xi)\in U\times\sqrt{-1}\boldsymbol{R}^n \mid f(x)=h(x)=0, \xi=c_1\mathrm{grad}_x f(x) + c_2\mathrm{grad}_x h(x)\ \ ((c_1,c_2)\in\boldsymbol{R}^2,\ c_1\neq 0)\}$$

$$B=\{(x,\sqrt{-1}\xi)\in U\times\sqrt{-1}\boldsymbol{R}^n \mid h(x)=0,\ \xi=c\,\mathrm{grad}_x h(x)\ \ (c\in\boldsymbol{R})\}$$

と定めた．特に，例えば $\delta(x_1-x_2)|_{\{x_2=0\}}=\delta(x_1)$.

例 3.1.4. $f_1(x), f_2(x)$ はいずれも条件(3.1.1)を満たす実数値実解析函数とする．今，更に

(3.1.7)　$\{f_1(x)=f_2(x)=0\}$ 上で $\mathrm{grad}_x f_1(x)$ と $\mathrm{grad}_x f_2(x)$は一次独立

なる条件が満たされているとする．この時 $\delta(f_1(x))\delta(f_2(x))$ は well-defined であり，

(3.1.8)　$\mathrm{S.S.}\delta(f_1)\delta(f_2)\subset\{(x,\sqrt{-1}\xi\infty)\in\sqrt{-1}S^*U \mid f_1(x)=f_2(x)=0, \xi=c_1\mathrm{grad}_x f_1+c_2\mathrm{grad}_x f_2\ \ ((c_1,c_2)\in\boldsymbol{R}^2-\{0\})\}$

が成立する，

例 3.1.5. 前例において f_1,f_2 が条件(3.1.7)の代わりに，それより弱い

(3.1.9)　$\{f_1(x)=f_2(x)=0\}$ において，$\alpha_1,\alpha_2\geqq 0$，$\alpha_1+\alpha_2\neq 0$ なる任意の α_1, α_2 に対し $\alpha_1\mathrm{grad}_x f_1(x)+\alpha_2\mathrm{grad}_x f_2(x)\neq 0$

なる条件が満たされるならば，$\dfrac{1}{f_1(x)+\sqrt{-1}\,0}\cdot\dfrac{1}{f_2(x)+\sqrt{-1}\,0}$ はwell-defined であり，

(3.1.10)　$\widehat{\mathrm{S.S.}}\ \dfrac{1}{f_1(x)+\sqrt{-1}\,0}\cdot\dfrac{1}{f_2(x)+\sqrt{-1}\,0}\subset\{(x,\sqrt{-1}\xi)\in\sqrt{-1}\,T^*U \mid \alpha_1 f_1=0,\ \alpha_2 f_2=0,\ \xi=\alpha_1\mathrm{grad}_x f_1(x)+\alpha_2\mathrm{grad}_x f_2(x)\ \ (\alpha_1,\alpha_2)\in\boldsymbol{R}^2, \alpha_1,\alpha_2\geqq 0\}$

が成立する．特に，例えば，$\dfrac{1}{x_1+\sqrt{-1}\,0}\cdot\dfrac{1}{x_1-x_2{}^2+\sqrt{-1}\,0}$，或いは $\left(\dfrac{1}{x_1+\sqrt{-1}\,0}\right)^2$ は well-defined である．これに反し，$\delta(x_1)\delta(x_1-x_2{}^2)$ 或いは $\delta(x_1)^2$ は(定理 3.1.5 の意味では) well-defined でないことに注意されたい．

§2.　積分

この節では超函数および microfunction の積分を論じる．まずそれ等の“不定積分”の存在を保証する次の命題を証明しよう．

命題 3.2.1. $M=\boldsymbol{R}^n$ とする．その時

(a) $D_1 \underset{\mathrm{def}}{=} \dfrac{\partial}{\partial x_1}: \mathcal{B}_M \to \mathcal{B}_M$ および $D_1: \mathcal{C}_M \to \mathcal{C}_M$ はいずれも全射的である．

(b) U_1 を $\boldsymbol{R}$ の連結開集合，U_2 を $\boldsymbol{R}^{n-1}$ の開集合，$U=U_1\times U_2$, $u\in\mathcal{B}_M(U)$ とする．この時 $\dfrac{\partial}{\partial x_1}u=0$ ならば $v\in\mathcal{B}_{\boldsymbol{R}^{n-1}}(U_2)$ が唯一つ存在して $u(x)=v(x')$ となる．但しここで $x'=(x_2,\cdots,x_n)$ である．

(c) $D_1: \mathcal{C}_M\to\mathcal{C}_M$ は $(x,\sqrt{-1}\xi\infty)$, 但し $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, $\xi_1\neq 0$, の近傍で同型である．更に $\xi_1=0$ となる点 $(x,\sqrt{-1}\xi\infty)$ の近傍では次の事実が成立する：U_1 を $\boldsymbol{R}$ の開区間, Ω を $\sqrt{-1}S^*\boldsymbol{R}^{n-1}$ の開集合とする時, $u\in\mathcal{C}_{\boldsymbol{R}^n}(U_1\times\Omega)$ が $D_1u=0$ を満たすならば $u=v(x')$ となる $v\in\mathcal{C}_{\boldsymbol{R}^{n-1}}(\Omega)$ が存在する．

［証明］ 微分方程式論で周知の次の補題をまず思い出そう．

補題*) $F: \boldsymbol{C}^n\to\boldsymbol{C}^{n-1}$ を $F(z_1,\cdots,z_n)=(z_2,\cdots,z_n)$ により定める．Ω を $\boldsymbol{C}^n$ の凸集合とし，

$\Omega_1=F(\Omega)$ とおく時次の(1), (2)が成立する．

(1) $D_1\mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^n}(\Omega)=\mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^n}(\Omega)$

(2) $u\in\mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^n}(\Omega)$ かつ $D_1u=0$ ならば $v\in\mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^{n-1}}(\Omega_1)$ で $u(z)=v(z')$ となるものが存在する．但し $z'=F(z)$.

［証明］ (2)は明らかであるから(1)を証明すれば十分である．任意の $f\in\mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^n}(\Omega)$ に対して $u\in\mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^n}(\Omega)$ で $D_1u=f$ となるものが存在することを示そう．まず Ω_1 を $\Omega\supset\{z_1=\alpha_j\}\times U_j(\alpha_j\in\boldsymbol{C})$ となるような凸開集合 U_j で覆うこととする．次に $f(z)\in\mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^n}(\Omega)$ に対して $u_j(z)=\int_{\alpha_j}^{z_1}f(z)dz_1$ と定めればこれは $\tilde{U}_j\underset{\mathrm{def}}{=}\Omega\cap F^{-1}(U_j)$ で定義された正則函数である．$\tilde{U}_j$ 上で $D_1u_j=f$ が成り立つから $\tilde{U}_j\cap\tilde{U}_k$ 上で $D_1(u_j-u_k)=0$ である．よって(2)により $u_j-u_k\underset{\mathrm{def}}{=}u_{jk}\in\mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^{n-1}}(U_j\cap U_k)$ となる．また，明らかに $\{u_{jk}\}$ はコサイクルになっている．Ω_1 は凸であるから Stein 多様体，従って $H^1(\Omega_1,\mathcal{O})=0$ である．他方，U_j も凸，従って Stein 多様体であり $\{U_j\}$ は Leray 被覆となる．従って Leray の定理(第1章第2節定理 1.2.1)により，$u_j'\in\mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^{n-1}}(U_j)$ が存在して $u_{jk}=u_j'-u_k'$ となる．そこで $\tilde{u}_j(z)=u_j(z)-u_j'(F(z))\in\mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^n}(\tilde{U}_j)$ と定めれば $D_1\tilde{u}_j=f$, かつ $\tilde{U}_j\cap\tilde{U}_k$

---

*) ここでは鈴木［1］の議論により証明を与える．これは，Ω が凸と限らない時にも適用できる興味ある議論である．

上で $\tilde{u}_j=\tilde{u}_k$, 従って $u\in\mathcal{O}_{C^n}(\Omega)$ を $u|_{U_j}=\tilde{u}_j$ として定めることができる．明らかに u は求める $D_1u=f$ の解である．（補題の証終）

命題 3.2.1 の証明に戻ろう．まず (a) を証明しよう． Uを $\boldsymbol{R}^n$ の凸開集合として $u\in\mathcal{B}_M(U)$ としよう．この時 $\boldsymbol{R}^n$ の開凸錐 $G_j(j=1,\cdots,N)$ を適当にとって（例えばG_j として第 j 象限をとればよい．） $u=\sum_j b_{U\times\sqrt{-1}G_j}(\varphi_j)$, 但し $\varphi_j\in\mathcal{O}_{C^n}(U\times\sqrt{-1}G_j)$ と表わすことができる．然るに補題により $D_1\phi_j=\varphi_j$ となる $\phi_j\in\mathcal{O}_{C^n}(U+\sqrt{-1}G_j)$ が存在する．そこで ϕ_j を用いて $v=\sum_j b(\phi_j)$ と定めれば, $v\in\mathcal{B}_M(U)$ かつ $D_1v=u$ となる．故に $D_1\colon\mathcal{B}_M\to\mathcal{B}_M$ は全射的である．同様にして $D_1\colon\mathcal{C}_M\to\mathcal{C}_M$ も全射的である．

次に (b) を証明しよう．まず第１章の§2 で述べた次の事実を思い出そう： $\xi_0,\cdots,\xi_n(\in\boldsymbol{R}^n)$ をその凸包が原点の近傍になるようにとり $G_j=\{y\in\boldsymbol{R}^n|k\neq j$ ならば $\langle y,\xi_k\rangle>0\}$, $G_{jk}=\{y\in\boldsymbol{R}^n|l\neq j,k$ ならば $\langle y,\xi_l\rangle>0\}$ とおけば

$$\mathcal{B}(U)=\bigoplus_j\mathcal{O}_{C^n}(U\times\sqrt{-1}G_j)/\bigoplus_{j,k}{}'\,\mathcal{O}_{C^n}(U\times\sqrt{-1}G_{jk})$$

が成り立つ．但しここで $\oplus'$ は交代和を表わす．即ち， $u\in\mathcal{B}(U)$ は $u=\sum_j b(\varphi_j),\varphi_j\in\mathcal{O}_{C^n}(U\times\sqrt{-1}G_j)$ と表わされ，又 $\sum_j b(\varphi_j)=0$ ならば $\varphi_{jk}\in\mathcal{O}_{C^n}(U\times\sqrt{-1}G_{jk})$ で $\varphi_{jk}=-\varphi_{kj}$ となるものが存在して $\varphi_j=\sum_k\varphi_{jk}$ と表わせる．

この事実を我々の場合に適用しよう． U_2を $\boldsymbol{R}^{n-1}$ の凸開集合として $U\underset{\text{def}}{=}(a,b)\times U_2\subset\boldsymbol{R}^1\times\boldsymbol{R}^{n-1}$ と定めよう．ここで $u\in\mathcal{B}(U)$ を $u=\sum_j b(\varphi_j)$, $\varphi_j\in\mathcal{O}_{C^n}(U\times\sqrt{-1}G_j)$ と表わす時, $D_1u=\sum_j b(D_1\varphi_j)=0$ ならば上述のことより $\phi_{jk}\in\mathcal{O}_{C^n}(U\times\sqrt{-1}G_{jk})$ かつ $\phi_{jk}=-\phi_{kj}$ なるものが存在して $D_1\varphi_j=\sum_k\phi_{jk}$ となる． $U\times\sqrt{-1}G_{jk}$ は凸であるから $\phi_{jk}=D_1\varphi_{jk}$ かつ $\varphi_{jk}=-\varphi_{kj}$ となる $\varphi_{jk}\in\mathcal{O}_{C^n}(U\times\sqrt{-1}G_{jk})$ が存在する ($j=k$ に対しては $\varphi_{jk}=0$ と定め, $j>k$ については $\phi_{jk}=D_1\varphi_{jk}$ の解 φ_{jk} をとり, $j<k$ の時 $\varphi_{kj}=-\varphi_{jk}$ として $\{\varphi_{jk}\}$ を定義すればよい)．その時 $D_1\varphi_j=\sum_k D_1\varphi_{jk}$ となり $D_1(\varphi_j-\sum_k\varphi_{jk})=0$ を得る．よって $\phi_j=\varphi_j-\sum_k\varphi_{jk}$ とすれば ϕ_j は z_1 に依存しないから $v=\sum_j b(\phi_j(z'))$ $(z'=(z_2,\cdots,z_n))$ は $\boldsymbol{R}^{n-1}$ 上の超函数を定め, $\boldsymbol{R}^n$ 上では $\sum_{j,k}b(\varphi_{jk})=0$ より $v=\sum_j b(\phi_j)=u$ を得る．

最後に (c) を証明しよう．前半は $(0,\sqrt{-1}dx_1\infty)\notin$S.S. (D_1u) ならば（即ち $(0,\sqrt{-1}dx_1\infty)$ で $\mathrm{sp}(D_1u)=0$ ならば） $(0,\sqrt{-1}dx_1\infty)\notin$S.S.$u$ となることを

示せばよい．$(0, \sqrt{-1}dx_1\infty)\notin$S.S.$(D_1u)$ と仮定すれば $D_1u=\sum_j b(\phi_j)$, $\phi_j\in \mathcal{O}(U_\varepsilon\times\sqrt{-1}\Gamma_j)$ と書くことができる．但しここで $U_\varepsilon=\{x\,|\,|x|<\varepsilon\}$, Γ_j は開凸錐で $\Gamma_j\subset\{y\in \boldsymbol{R}^n;\ y_1<0\}$ となるものとする．(第2章の定理2.3.4による.) 又，$\Gamma_{j,\varepsilon}=\Gamma_j\cap\{y\,|\,|y|<\varepsilon\}$ と定める．$U_\varepsilon\times\sqrt{-1}\Gamma_{j,\varepsilon}$ は凸であるから補題により $D_1\varphi_j=\phi_j$ となる $\varphi_j\in\mathcal{O}_{C^n}(U_\varepsilon\times\sqrt{-1}\Gamma_{j,\varepsilon})$ が存在する．そこで $v=\sum_j b(\varphi_j)$ とおくと $D_1u=D_1v$ 故 $D_1(u-v)=0$ となる．よって (b) により $u-v=w(x')$ $(x'=(x_2,\cdots,x_n))$ と表わせる．よって $(0, \sqrt{-1}dx_1\infty)\notin$ S.S.$(u-v)$, 一方 $(0, \sqrt{-1}dx_1\infty)\notin$S.S.$v$ (v の定義と第2章の定理 2.3.5 による) であるから $(0, \sqrt{-1}dx_1\infty)\notin$S.S.$u$ が得られる．最後に (c) の後半を示そう．$u=\text{sp}(f), f\in\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n)$ とする．$(x, \sqrt{-1}\xi\infty)\notin$S.S.$(D_1f)$ ならば第2章定理2.3.5により，$D_1f=\sum_j b(\phi_j)$, $\phi_j\in\mathcal{O}_{C^n}(U_\varepsilon\times\sqrt{-1}\Gamma_{j,\varepsilon})$, $\Gamma_j\subset\{y\,|\,\langle y,\xi\rangle<0\}$ と表わせる．そこで，$D_1\varphi_j=\phi_j$ となる $\varphi_j\in\mathcal{O}_{C^n}(U_\varepsilon\times\sqrt{-1}\Gamma_{j,\varepsilon})$ に対して $v=\sum_j b(\varphi_j)$ と定義すれば $(x, \sqrt{-1}\xi\infty)\notin$S.S.$v$ である．$D_1f=D_1v$ であるから $w=f-v$ とおけば $D_1w=0$ が成り立ち，更に考えている点の近傍で $\text{sp}(v)=0$ であるから $\text{sp}(u)=\text{sp}(w)$ となる．これで (c) の後半も証明された． (証終)

この命題 3.2.1. を用いて，超函数の定積分を定義しよう．勿論，被積分函数が積分変数について，何等かの条件を満たしていなければ，それが定義できるはずがない．我々はまず次のような場合を考えてみよう：

N を実解析的多様体として，$\boldsymbol{R}\times N$ 上の超函数 $u(t, x)$ が Supp $u(t,x)\subset\{(t,x)\in\boldsymbol{R}\times N\,|\,a<t<b\}$ という条件を満たしているとしよう．この時，命題3.2.1により $D_tv(t,x)=u(t,x)$ となる超函数 $v(t,x)$ が存在するから*)，積分 $\int u(t,x)dt$ を $v(b,x)-v(a,x)$ によって定義する．a および b の近傍では $D_tv(t,x)=u(t,x)=0$ が成り立つから，命題 3.2.1 (c) の前半の主張により，S.S. $v\cap\sqrt{-1}S^*_{\{b\}\times N}(\boldsymbol{R}\times N)=\phi$ となる．従って定理3.1.3により $v(t,x)|_{t=b}=v(b,x)$ は well-defined であることに注意しよう．$v(a,x)$ が well-defined であることも全く同様である．又，この時，命題3.2.1(b) により，$b'>b$ なる任意の b' に対して，$v(b',x)=v(b,x)$ が成立し，$a'<a$ なる任意の a'

*) 命題3.2.1の証明では，$N=\boldsymbol{R}^{n-1}$ の場合しか議論されていないが，Nが一般の多様体の場合の証明も Grauert の定理 (第1章定理1.2.3) により容易に与えることができる．各自試みられたい．

に対して $v(a', x)=v(a, x)$ が成立するから，$\int u(t, x)dt$ は (a, b) のとり方に依存しないことが判る．又，同じく命題 3.2.1 (b) により，$D_t\tilde{v}(t, x)=u(t, x)$ なる他の超函数 $\tilde{v}(t, x)$ を用いて $\int u(t, x)dt$ を $\tilde{v}(t, x)-\tilde{v}(a, x)$ と定義しても結果が変わらないことも明らかである．従って，この方法により $\int u(t, x)dt$ は確定する．

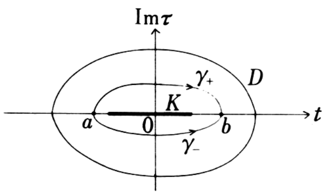
又，一般に $\boldsymbol{R}^m\times N$ 上の超函数 $u(t, x)=u(t_1, \cdots, t_n, x)$ が $\boldsymbol{R}^m$ の適当な相対コンパクト集合 K に対して $\mathrm{Supp}\,(u(t, x))\subset K\times N$ という条件を満たす時，$u(t, x)$ の定積分 $\int u(t, x)dt$ を，上の議論を反覆使用することによって $\int\left(\cdots\int(\cdots(\int u(t, x)dt_1)\,dt_2\cdots\right)dt_m$ として定義できることは明らかであろう．

特に簡単な場合として $\boldsymbol{R}$ 上で定義された一変数の超函数 $u(t)$ の積分を例として考えよう．まず $\mathrm{Supp}\,u(t)=K\subset(a, b)$ とし，K の複素近傍 D を一つ固定する．ここで D は $[a, b]$ を含むと仮定しても構わない，又，変数 $\tau(\in\boldsymbol{C})$ を $\boldsymbol{R}$ 上に制限したものを $t(=\tau|_{\boldsymbol{R}})$ と記すこととする．その時，第1章§2により $u(t)$ は $D-K$ 上定義された正則函数 $\varphi(\tau)$ の境界値で表わせる．即ち，$\varphi_\pm(\tau)=\underset{\overrightarrow{\mathrm{Im}\tau\to\pm0}}{\lim}\varphi(\tau)$ と置いた時 $u(t)=\varphi_+(\tau)-\varphi_-(\tau)$ となる．そこで $\phi_+(\tau)=\int_a^\tau\varphi(\tau)d\tau$ $(\mathrm{Im}\tau>0)$, $\phi_-(\tau)=\int_a^\tau\varphi(\tau)d\tau$ $(\mathrm{Im}\tau<0)$ と置き，$v(t)=\phi_+(t+i0)-\phi_-(t-i0)$ と置けば $D_tv(t)=\varphi(t+i0)-\varphi(t-i0)=u(t)$ である．従って定義により

$$\int u(t)dt=v(b)-v(a)=\int_{a \atop \gamma_+}^b\varphi(\tau)d\tau-\int_{a \atop \gamma_-}^b\varphi(\tau)d\tau=\oint_\gamma\varphi(\tau)d\tau$$

を得る．但し積分路 γ は K の回りを時計回りに一周する道とする(下図参照)．

図 3.2.1.



例 3.2.1.　$\int_{\boldsymbol{R}}\delta(t)dt=1$

［証明］　$\delta(t)=\dfrac{-1}{2\pi i}\left(\dfrac{1}{t+i0}-\dfrac{1}{t-i0}\right)$ 故，この場合は $\varphi(\tau)=-\dfrac{1}{2\pi i\,\tau}$ を単位円にそって積分すれば $\oint_\gamma\dfrac{d\tau}{\tau}=\int_\pi^0\dfrac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}}d\theta+\int_0^{-\pi}\dfrac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}}d\theta=[i\theta]_\pi^0+[i\theta]_0^{-\pi}=-2\pi i,$

よって$\oint_\gamma \varphi(\tau)d\tau=1$ となる．

或いは次のように直接定義に従ってこれを示すこともできる：
$Y(x)=\dfrac{-2\pi i+\log(x+i0)-\log(x-i0)}{-2\pi i}$ を x で微分して $\dfrac{d}{dx}Y(x)=$
$-\dfrac{1}{2\pi i}\left\{\dfrac{1}{x+i0}-\dfrac{1}{x-i0}\right\}=\delta(x)$ を得る．即ち，ヘビサイド函数がδ-函数の原始函数である．従って，

$$\int \delta(x)dx=Y(1)-Y(-1)=1$$

を得る．因みに，$Y(x)$ の原始函数は x_+ であることも注意しておこう．

例 3.2.2.　$\int \delta^{(n)}(x)dx=0 \quad (n\geqq 1)$

但し，ここで $\dfrac{d^n}{dx^n}\delta(x)$ を $\delta^{(n)}(x)$ と略記した．

［証明］　定義により $\dfrac{d}{dx}\delta^{(n-1)}(x)=\delta^{(n)}(x)$ $(n\geqq 1)$ であり，他方 $x\neq 0$ なら $\delta^{(n-1)}(x)=0$ $(n\geqq 1)$ であるから明らかである．

例 3.2.3.　$\int_{-\infty}^{1} x_+^\lambda dx=\dfrac{1}{\lambda+1} \quad (\lambda\neq -1, -2, \cdots)$

［証明］　$\lambda\neq -1, -2, \cdots$ ならば，x_+^λ は超函数として well-defined であって，$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\lambda+1}x_+^{\lambda+1}\right)=x_+^\lambda$ が成り立つことに注意すれば明らかである．(第2章例 2.4.2 を参照されたい．)

さて，我々の議論は，$\boldsymbol{R}\times N$ 上の超函数 $u(t, x)$ が Supp $u(t, x)\subset\{(t, x)\in \boldsymbol{R}\times N \mid a<t<b\}$ なる条件を満たす時，その原始函数 $v(t, x)$ (即ち，$\dfrac{\partial}{\partial t}v(t, x)=u(t, x)$ の解)を用いて，$u(x, t)$ の t についての定積分を

$$\int u(t, x)dt=v(b, x)-v(a, x)$$

と定義するものであった．又 $t=(t_1, \cdots, t_m)$ の時はこの操作を繰り返すのであった．このようにして $\boldsymbol{R}\times N$ 上の超函数がしかるべき台の条件を満たしている時，積分操作によって，N 上の超函数を得ることができた．(勿論，$N=\phi$ ならば，得られる結果は複素数である．)従って，$u(t, x)$ の特異性スペクトルを知って，$\int u(t, x)dt$ の特異性スペクトルを知ろう，と試みることは自然である，実際，この時，我々は次のように極めて簡潔な結果を得ることができる．これは古典的な stationary phase の方法(例えば Lax[1] 参照)の現代化とも謂うべきものであり，積分作用の持つ強い平滑化作用を幾何学的に定式化したものと見られよう．Hörmander [3] の議論は古典的方法により近い．

命題 3.2.2. $\boldsymbol{R}\times N$ 上の超函数 $u(t,x)$ が $\operatorname{Supp} u(t,x)\subset\{(t,x)\in\boldsymbol{R}\times N\mid a<t<b\}$ なる条件を満たしているとする．この時 $(x_0,\sqrt{-1}\langle\xi_0,dx\rangle\infty)\in\sqrt{-1}S^*M$ と任意の $t\in\boldsymbol{R}$ に対して

$$(t,x_0,\sqrt{-1}(0\cdot dt+\langle\xi_0,dx\rangle)\infty)\notin \mathrm{S.S.}u(x,t)$$

が成り立つならば

$$(x_0,\ \sqrt{-1}\langle\xi_0,dx\rangle\infty)\notin \mathrm{S.S.}\left(\int u(t,x)dx\right)$$

が成り立つ．

注意． $u(t,x)$ の特異性スペクトルの内 $\int u(t,x)dt$ の特異性スペクトルに寄与するのが，このように小さな集合であるというのは極めて重要である．

［証明］ $\boldsymbol{R}\times N\to N$ なる射影を f と記そう．仮定から $(t,x_0,\sqrt{-1}\langle\xi_0,\ dx\rangle\infty)$ の近傍で $\dfrac{\partial}{\partial t}\mathrm{sp}v(t,x)=\mathrm{sp}u(t,x)=0$ が成立するから，命題 3.2.1 の (c) により $w(x)\in\mathcal{C}_{N,(x_0,\sqrt{-1}\xi_0\infty)}$ が存在して $\mathrm{sp}v(x,\ t)=f^*w(x)$ となる．ここで N を $x\xrightarrow{\iota_b}(b,x)$ によって $\boldsymbol{R}\times N$ の部分多様体と考えれば $f\circ\iota_b=\mathrm{id}_N$ （$=N$ 上の恒等写像）であるから $\mathrm{sp}v(b,x)=\mathrm{sp}v(t,x)|_{t=b}=w(x)$ となる．同様にして $\mathrm{sp}v(a,x)=w(x)$ が成り立つから $\mathrm{sp}(v(b,x)-v(a,x))=w(x)-w(x)=0$ を得る．　（証終）

次に microfunction の積分を考えよう．M を実解析的多様体とする時，$\boldsymbol{R}\times\sqrt{-1}S^*M$ を

$$\begin{array}{ccc}\boldsymbol{R}\times\sqrt{-1}S^*M & \hookrightarrow & \sqrt{-1}S^*(\boldsymbol{R}\times M)\\ \Uparrow & & \Uparrow\\ (t,x,\sqrt{-1}\langle\xi,dx\rangle\infty) & \longmapsto & ((t,x),\sqrt{-1}(0\cdot dt+\langle\xi,dx\rangle)\infty)\end{array}$$

なる埋め込み写像によって $\sqrt{-1}S^*(\boldsymbol{R}\times M)$ の部分集合と見做すことができる．従って U を $\sqrt{-1}S^*M$ の開集合とすればこの同一視によって $\boldsymbol{R}\times U$ は $\sqrt{-1}S^*(\boldsymbol{R}\times M)$ の部分集合となる．今 $u(t,x)\in\mathcal{C}_{\boldsymbol{R}\times M}(\boldsymbol{R}\times U)$ であって $\operatorname{Supp} u(t,x)\subset\{(t,x)\mid a<t<b\}$ となっているものを考えよう*)．ここで $\dfrac{\partial}{\partial t}v(t,x)=u(t,x)$ となる $\boldsymbol{R}\times U$ 上の microfunction $v(t,x)$ をとりそれに対し

---

*) $\boldsymbol{R}\times U$ は $\sqrt{-1}S^*(\boldsymbol{R}\times M)$ の開集合ではないから正確には “$u(t,x)$ は $\boldsymbol{R}\times U$ を含むある開集合の上の microfunction であって” という意味である．但し $\boldsymbol{R}\times U$ に制限して考える．即ち，正確には $u(t,x)\in\mathcal{C}_{\boldsymbol{R}\times M}|_{\boldsymbol{R}\times\sqrt{-1}S^*M}$ である．なお，言うまでもないことではあるが，$\operatorname{Supp} u(t,x)$ は microfunction の台である．従って仮定は超函数の積分の場合の条件よりはるかに使い易いものである．

て　$w(x)=\int u(t,x)dt=v(b,x)-v(a,x)$ と定義する．この時，
$\Lambda=(\{b\}\times M)\underset{\boldsymbol{R}\times M}{\times}\sqrt{-1}S^*(\boldsymbol{R}\times M)-\sqrt{-1}S^*_{\{b\}\times M}(\boldsymbol{R}\times M)$ と定めて次の可換図式を考えよう．

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{-1}S^*(\boldsymbol{R}\times M) \underset{\varpi}{\hookleftarrow} \Lambda & \supset & (\{b\}\times M)\underset{\boldsymbol{R}\times M}{\times}(\boldsymbol{R}\times\sqrt{-1}S^*M) \\ \downarrow \rho & \overset{\sim}{\swarrow} & \\ \sqrt{-1}S^*(\{b\}\times M) & & \end{array}$$

ここで $\varpi^{-1}\,\mathrm{Supp}\,u\subset(\{b\}\times M)\times(\boldsymbol{R}\underset{\boldsymbol{R}\times M}{\times}\sqrt{-1}S^*M)$ であるから
$\rho:\varpi^{-1}\mathrm{Supp}\ u\to\sqrt{-1}S^*M$ は固有写像である．従って定理 3.1.4 により
$v(t,x)$ を $t=b$(又は $t=a$) に制限することができて $v(b,x)$, $v(a,x)$ が意味を持つ．また，この定義が (a,b) のとり方にも，v の選び方にもよらないことも，超函数の場合と同様にして判る．積分変数が多変数の場合にも，超函数の場合と同様に，上の手続を反復使用して $\int u(t_1,\cdots,t_m,x)dt_1\cdots dt_n$ を
$\int(\cdots(\int(\int u(t_1,\ \cdots,\ t_m,\ x)dt_1)dt_2)\cdots)dt_m$ により定義できる．

以上をまとめて次の定理を得る．

定理 3.2.1. (Ⅰ)(超函数の積分)　M, N を実解析的多様体，f: $M\times N\to N$ を自然な射影とする．$M\times N$ 上の超函数 $u(t,x)$ に対し $f|_{\mathrm{Supp}u}$ が固有写像であるとする．この時 $u(t,x)$ のファイバーに沿っての積分

$$v(x)=\int_{f^{-1}(x)}u(t,\ x)dt$$

が定義できる．更にこの時，

$$\mathrm{S.S.}v(x)\subset\pi(\mathrm{S.S.}u\cap M\times\sqrt{-1}S^*N)$$

が成り立つ．ここで π は $M\times\sqrt{-1}S^*N$ から $\sqrt{-1}S^*N$ への自然な射影である．即ち，

$$f_!(\mathcal{B}_{M\times N}\otimes v_M)\longrightarrow\mathcal{B}_N$$

なる準同型写像が存在する．但し，ここで Ω^m_M を M 上の $m(=\dim M)$ 次微分形式のなす層，ω_M を M の orientation sheaf として $v_M\underset{\mathrm{def}}{=}\Omega^m_M\otimes\omega_M$ と定めた．

(Ⅱ) (Microfunction の積分) M, N, π は (Ⅰ) におけると同じとする．U を $\sqrt{-1}S^*N$ の開集合とする．$u(t,x)\in\mathcal{C}_{M\times N}(\pi^{-1}(U))$ に対して $\pi|_{\mathrm{Supp}u(t,x)}$ が固有写像であれば積分 $v(x)=\int_{f^{-1}(x)}u(t,\ x)dt$ が U 上 (microfunction として) well-defined である．即ち，

$$\pi_!(\mathcal{C}_{M\times N}|_{M\times\sqrt{-1}S^*N}\otimes v_M)\longrightarrow\mathcal{C}_N$$

なる準同型写像が存在する.

［証明］ $M=\boldsymbol{R}^m$ の時は既に述べた. 一般には M を座標近傍で覆い, 次に被積分函数を命題 3.1.1 によって適当に分割して各座標近傍毎に積分を定義しそれらを足し合せればよい. （証終）

問. "Fubini の定理", 即ち $\int dy\int f(x,y)dx=\int dx\int f(x,y)dy$ が成り立つ為の十分条件を与えてみよ.

また, $\int f(x)g(x,y)dy=f(x)\int g(x,y)dy$,

$$\left(\int f(x,y)dy\right)\Big|_{x=a}=\int\left(f(x,y)\Big|_{x=a}\right)dy$$

等が成立する為の十分条件を与えよ.

以下, 応用上重要な積分の例をいくつか与えよう. 以下, この節でも誤解の恐れのない時には虚数単位 $\sqrt{-1}$ を i と略記する.

まず多変数の δ-函数について $\int_{\boldsymbol{R}^n}\delta(x)dx=1$ であることを示そう.

$$\delta(x)=\frac{1}{(-2\pi\sqrt{-1})^n}\sum_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n=\pm1}\frac{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}{\prod_{k=1}^n(x_k+\sqrt{-1}\varepsilon_k0)}$$

$$=\prod_{k=1}^n\frac{1}{(-2\pi\sqrt{-1})}\left(\frac{1}{x_k+\sqrt{-1}\,0}-\frac{1}{x_k-\sqrt{-1}\,0}\right)=\delta(x_1)\delta(x_2)\cdots\delta(x_n)$$

が成り立つから

$\int\delta(x)dx=\prod_{i=1}^n\left(\int\delta(x_i)dx_i\right)=1$ となる（一変数の場合 $\int\delta(x_i)dx_i=1$ となることは既に示した).

次に理論的に重要なばかりでなく応用上も極めて重要な, δ-函数の平面波への分解公式を証明しよう*). $\boldsymbol{R}^n$ 上の $(n-1)$-型式 $\omega(\xi)$ を

---

*) この分解公式は本質的には John [1], [2] による. John [1], [2] はこの公式を基礎に楕円型方程式の基本解を美しい方法で構成した. 佐藤先生が microfunction の概念を形成される際, 極めて重要な指標であったと聞く. 後述の定理 3.4.3 に, John 氏の議論を microfunction の理論の立場から見直したものがある. なお, Leray [1] は John 氏の理論を双曲型方程式に拡張しようと試みた美しくも難解な労作である. なお, 本章第 6 節において双曲型方程式に対する基本解の構成を我々の立場から行う.

$$\omega(\xi)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\xi_i d\xi_1\wedge\cdots\wedge d\xi_{i-1}\wedge d\xi_{i+1}\wedge\cdots\wedge d\xi_n$$

と定義する．以下，$x=(x_1,\cdots,x_n)$，$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ に対して $\langle x,\xi\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_i\xi_i$ と定義する．さて $(t+\sqrt{-1}0)^{-n}$ は一変数超函数として well-defined であるからこれに $t=\langle x,\xi\rangle$ を代入すれば $(\langle x,\xi\rangle+\sqrt{-1}0)^{-n}$ なる超函数が得られる（例3.1.2参照）．ここで $\boldsymbol{R}^n$ 上の $(n-1)$-型式 $\dfrac{\omega(\xi)}{(\langle x,\xi\rangle+\sqrt{-1}\,0)^n}$ は ξ を正数倍する操作で不変であるから球面 $S^{n-1}=(\boldsymbol{R}^n-\{0\})/\boldsymbol{R}_+^\times$ の上の $(n-1)$-型式と考えることができる．即ち，正確に述べれば：

補題． M,N をそれぞれ $(n+1)$ 次元，および n 次元の実解析的多様体として $f\colon M\to N$ を smooth な全射的実解析的写像であるとする，更に各ファイバー $f^{-1}(y)\,(y\in N)$ が連結であると仮定する．v を各ファイバーに接し，かつどこでも零でない M 上のベクトル場とする．M 上の超函数を係数とする n-型式 η が $\iota_v\eta=0$ かつ $L_v\eta=0$ （ι_v は内部積，L_v は Lie 微分*)）を満たすならば，N 上の超函数を係数とする n-型式 η_0 が唯一つ存在して $\eta=f^*(\eta_0)$ となる．

［証明］ 適当に局所座標を定めて $f\colon(t,x)\mapsto x$ と仮定しても構わない．その時 $v=a(t,x)\dfrac{\partial}{\partial t}$，$\eta=\varphi_0 dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n+dt\wedge(\sum_j g_j(t,x)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{j-1}\wedge dx_{j+1}\wedge\cdots\wedge dx_n)$ と表わせる．仮定より $\iota_v\eta=a(t,x)\sum_j g_j(t,x)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{j-1}\wedge dx_{j+1}\wedge\cdots\wedge dx_n=0$ かつ $a(t,x)\neq0$ が成り立つから $\eta=\varphi_0 dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$ となる．他方，仮定より

$$L_v\eta=a(t,x)\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n=0$$

が成り立つ．従って $\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial t}=0$ を得る．よって $\eta_0=\varphi_0 dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$ とおけばこれは N 上の n-型式であって $\eta=f^*(\eta_0)$ となる．　　　（補題の証終）

今の場合 $v=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\dfrac{\partial}{\partial\xi_i}$ とすれば，$L_v\omega(\xi)=n\omega(\xi)$ であるから

$$L_v\frac{\omega(\xi)}{(\langle x,\xi\rangle+i0)^n}=0$$

同様に

$$\iota_v\frac{\omega(\xi)}{(\langle x,\xi\rangle+i0)^n}=0$$

となり，上述の補題により S^{n-1} 上の $(n-1)$-型式と考えることができるのである．さて，この時 John [1], [2] による次の結果を我々の立場から証明して

*) 用語については，例えば松島［1］を参照．

みよう.

命題 3.2.3. (δ-函数の平面波への分解公式)

$$\delta(x)=\frac{(n-1)!}{(-2\pi\sqrt{-1})^n}\int_{S^{n-1}}\frac{\omega(\xi)}{(\langle x,\xi\rangle+\sqrt{-1}\,0)^n}$$

が成り立つ.

［証明］ $\omega(\xi)$ は S^{n-1} 上の体積要素であるから $n=1$ の場合(従って $S^0=\{-1\}\cup\{+1\}$)

$$\frac{1}{-2\pi\sqrt{-1}}\int_{\{\pm1\}}\frac{|\xi|}{(x\xi+\sqrt{-1}\,0)}=\frac{1}{-2\pi\sqrt{-1}}\left\{\frac{1}{x+\sqrt{-1}}+\frac{1}{-x+\sqrt{-1}\,0}\right\}$$

$$=\frac{1}{-2\pi\sqrt{-1}}\left\{\frac{1}{x+\sqrt{-1}\,0}-\frac{1}{x-\sqrt{-1}\,0}\right\}=\delta(x)$$

となり確かに成り立っている. 一般の場合をファイバーに沿っての積分の概念を用いて証明しよう.

補題 (Feynman*)) $a=(a_1,\cdots,a_n)\in\boldsymbol{C}^n$ が $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\neq0$ かつ $\xi_i\geqq0$ $(1\leqq i\leqq n)$ なる任意の ξ に対して $\langle a,\xi\rangle\neq0$ を満たすとする. この時

$$\frac{1}{a_1\cdots a_n}=(n-1)!\int_{\xi_1\geqq0,\cdots,\xi_n\geqq0}\frac{\omega(\xi)}{\langle a,\xi\rangle^n}$$

が成り立つ.

［証明］ $\mathrm{Im}\,a_j<0$ $(1\leqq j\leqq n)$ の場合に証明すれば, 一般の場合はその解析接続として得られる. 今 $\mathrm{Im}\,a_k<0$ とすれば,

$$\frac{1}{a_k}=\sqrt{-1}\int_0^\infty e^{-\sqrt{-1}a_kx_k}dx_k$$

が成り立つから

$$\frac{1}{a_1\cdots a_n}=(\sqrt{-1})^n\int_{x_1\geqq0,\cdots,x_n\geqq0}e^{-\sqrt{-1}<a,x>}dx$$

を得る. ここで $x=t\xi(t\in\boldsymbol{R},\xi\in S^{n-1})$ と置けば, $dx=t^{n-1}dt\omega(\xi)$ を得る. 従って

$$\frac{1}{a_1\cdots a_n}=(\sqrt{-1})^n\int_{\substack{\xi_1\geqq0,\cdots,\xi_n\geqq0\\ \xi\in S^{n-1}}}\omega(\xi)\quad\int_0^\infty t^{n-1}e^{-\sqrt{-1}<a,\xi>t}dt=(n-1)!\int_{\substack{\xi_1\geqq0,\cdots,\xi_n\geqq0\\ \xi\in S^{n-1}}}\frac{\omega(\xi)}{\langle a,\xi\rangle^n}$$

を得る. (補題の証終)

---

*) この公式は後述の Feynman 積分の研究に際して Feynman が巧みに用いたものである.

命題の証明に戻ろう.

$$\int \frac{\omega(\xi)}{(\langle x,\xi\rangle+\sqrt{-1}\,0)^n}=\sum_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n=\pm1}\int_{\varepsilon_i\xi_i\geqq 0}\frac{\omega(\xi)}{(\langle x,\xi\rangle+\sqrt{-1}\,0)^n}$$

の成立することは容易に確かめ得る. 然るに, 後述の命題 3.2.4 により積分操作と境界値をとる操作が可換であることに注意すれば

$$\int_{\varepsilon_i\xi_i\geqq 0}\frac{\omega(\xi)}{(\langle x,\xi\rangle+\sqrt{-1}\,0)^n}=b_{\{\mathrm{Im}\langle z,\xi\rangle>0\}}\left(\int_{\varepsilon_i\xi_i\geqq 0}\frac{\omega(\xi)}{\langle z,\xi\rangle^n}\right)=$$

$$=b\left(\int_{\eta_1\geqq 0,\cdots,\eta_n\geqq 0}\frac{\omega(\eta)}{\langle z,\varepsilon\eta\rangle^n}\right)$$

が成立する. ここで上の補題を用いれば $\dfrac{1}{(n-1)!}b\left(\dfrac{1}{(\varepsilon_1 z_1)\cdots(\varepsilon_n z_n)}\right)=$ $=\dfrac{1}{(n-1)!}\cdot\dfrac{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}{(x_1+\sqrt{-1}\,\varepsilon_1 0)\cdots(x_n+\sqrt{-1}\,\varepsilon_n 0)}$ が成り立つ. 従って

$$\int\frac{\omega(\xi)}{(\langle x,\xi\rangle+\sqrt{-1}\,0)^n}=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n=\pm1}\frac{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}{(x_1+\sqrt{-1}\,\varepsilon_1 0)\cdots(x_n+\sqrt{-1}\,\varepsilon_n 0)}$$

$$=\frac{(-2\pi\sqrt{-1})^n}{(n-1)\,!}\delta(x)$$

を得る. これにより, 次の命題 3.2.4 を認めれば, 命題 3.2.3 の証明は完結することとなる.

命題 3.2.4. M, N を実解析的多様体とし, その複素化を各々 M^C, N^C とする. 又, N はコンパクトと仮定する. N の閉部分集合 K_j に対し $N=\bigcup_j K_j$ かつ $v(N)=\sum_j v(K_j)$ (v は体積)が成り立つとする. $U_j(\subset\sqrt{-1}SM)$ を $\tau(U_j)=M$ となる開集合, $D_j(\subset M^C\times N^C)$ を $U_j\times K_j$*) の錐状近傍とし, $f_j(z,\tau)\in\mathcal{O}(D_j)$ が存在して $u(x,t)$ は $M\times K_j$ の近傍で $u(x,t)=b_{D_j}(f_j(z,\tau))$ と表わせると仮定しよう. この時 $V_j\times K_j\subset D_j$ となる U_j の錐状近傍 V_j が存在して

$$\int u(x,t)dt=\sum_j b_{V_j}\left(\int_{K_j}f_j(z,t)dt\right)$$

が成り立つ.

[証明] K_j が $\boldsymbol{R}^n$ 内の直方体の場合に証明すれば十分であるから $K_j=[a_1,c_1]\times\cdots\cdots\times[a_n,c_n]$ と置こう. 一般に $a,c\in\boldsymbol{R}$, $a<c$ として $Y_{a,c}(t)=Y(c-t)\,Y(t-a)$ と置けば,

*) $\sqrt{-1}\,SM\times N\hookrightarrow\sqrt{-1}\,S(M\times N)$ と見做せるから, $U_j\times K_j$ をここでは $\sqrt{-1}\,S(M\times N)$ の部分集合と見ている.

$$\int_{a_1}^{c_1}\cdots\int_{a_n}^{c_n}u(x,t)dt=\int u(x,t)\,Y_{a_1,c_1}(t_1)\cdots Y_{a_n,c_n}(t_n)dt$$

である．これが $b(\int_{a_1}^{c_1}\cdots\int_{a_n}^{c_n}f_j(z,t)dt)$ に等しいことを示すには，$n=1$ の時に証明すれば十分である．即ち，

$$\int_a^c u(x,t)dt=b(\int_a^c f(z,t)dt)$$

を示せば，十分である．さて，

$g(z,t)=\int_a^t f(z,t)dt$ に対して $v(x,t)=b(g(z,t))$ とおけば $\dfrac{\partial}{\partial t}v(x,t)=u(x,t)$ が成立することは明らかである．従って $b(\int_a^c f(z,t)dt)=v(x,c)-v(x,a)$ となる．故に $\int_a^c u(x,t)dt=v(x,c)-v(x,a)$ となることを示せば十分である．ここで次の補題に注意しよう．

補題． 二つの超函数 $u(x,t)$ と $v(x,t)$ が $\dfrac{\partial}{\partial t}v(x,t)=u(x,t)$ なる関係式を満たすとする．その時，実数 $a,c(a<c)$ に対し

$$w(x,t)=v(x,t)+Y(t-c)\{v(x,c)-v(x,t)\}+Y(a-t)\{v(x,a)-v(x,t)\}$$

と定めれば

$$\frac{\partial}{\partial t}w(x,t)=u(x,t)\,Y_{a,c}(t)$$

が成立する．

これは次の命題 3.2.5 を用いて計算すれば直ちに証明できる．

ここで補題を認めれば，命題 3.2.4 の証明は次のようにして完結する：

まず補題の w を用いれば $\int_a^c u(x,t)dt=\int u(x,t)\,Y_{a,c}(t)dt=\int\dfrac{\partial}{\partial t}w(x,t)dt=$ $=\int_{a'}^{c'}\dfrac{\partial}{\partial t}w(x,t)dt=w(x,c')-w(x,a')$ (但し $a'<a<c<c'$) を得る．更にこの時 $w(x,c')=v(x,c)$，$w(x,a')=v(x,a)$ が成立するから

$$\int_a^c u(x,t)dt=v(x,c)-v(x,a)=b(\int_a^c f(x,t)dt)$$

を得る．　(証終)

命題 3.2.5. 超函数 $u(x,t)$ が $(x,0;\pm\sqrt{-1}\,dt\infty)\notin \mathrm{S.S.}u$ なる条件を満たすならば制限 $u(x,0)=u(x,t)|_{t=0}$ および積 $u(x,t)\delta(t)$ が共に定義され，それ等は次の関係式を満足する：

$$u(x,t)\delta(t)=u(x,0)\delta(t)$$

［証明］ 仮定の下で $u(x,0)$ および $u(x,t)\delta(t)$ が well-dfined であることは既に示されている（前節定理 3.1.3 および定理 3.1.5）． 従って $u(x,t)\delta(t)=$ $=u(x,0)\delta(t)$ を示せば十分である．この為にまず次の補題を証明しよう．

補題． 超函数 $u(x,t)$ が $(x,0;\pm\sqrt{-1}\,dt\infty)\notin\mathrm{S.S.}u(x,t)$ なる条件を満たすとする．この時，次の二つは同値である．

(1) $u(x,0)=0$

(2) $(x,0;\pm\sqrt{-1}\,dt\infty)\notin\mathrm{S.S.}v(x,t)$ となる超函数 $v(x,t)$ が存在して $u(x,t)=tv(x,t)$ が成立する．

［証明］ (2)から(1)が従うのは明らかである．(1)から(2)が従うことを示そう． まず，$u=\sum_j b(f_j(z,\tau))$ と u を正則函数の境界値として表わそう．ここで S.S.$u(x,t)$ についての仮定より，$f_j(z,0)$ は well-defined であるとしても構わない．この時，$u|_{t=0}=\sum_j b(f_j(z,0))=0$ と云う仮定より $f_j(z,0)$ がコバウンダリー，即ち，$f_j(z,0)=\sum_k g_{jk}(z)$, $g_{jk}=-g_{kj}$ と表わせることが判る． そこで $h_j(z,\tau)=f_j(z,\tau)-\sum_k g_{jk}(z)$ と置くと，$u=\sum_j b(f_j)=\sum_j b(f_j-\sum_k g_{jk})=\sum_j b(h_j)$ と表わせる．一方，$h_j(z,0)=0$ でかつ $h_j(z,\tau)$ は正則であるから $h_j(z,\tau)=\tau\varphi_j(z,\tau)$ と表わせる． 従って $v=\sum_j b(\varphi_j(z,\tau))$ と定めれば， 明らかに $u(x,t)=tv(x,t)$ が成立する． （補題の証終）

さて補題により $u(x,t)-u(x,0)=tv(x,t)$ と表わせることが判る．これを $\delta(t)$ に掛けて，$u(x,t)\delta(t)-u(x,0)\delta(t)=(tv(x,t))\delta(t)=(v(x,t)t)\delta(t)$ を得る． $(x,0{:}\pm\sqrt{-1}\,dt\infty)\notin\mathrm{S.S.}v(x,t)$ なる仮定より結合律が成り立ち $(v(x,t)t)\delta(t)$ $=u(x,t)\cdot(t\delta(t))=0$ を得る． （証終）

δ 函数に関する次の命題は応用上重要である．

命題 3.2.6. f を $\boldsymbol{R}$ の原点の近傍から R の原点の近傍への実解析的写像であって $f(0)=0$, $f'(0)\neq0$ なるものとする．然らば原点の近傍で

$$\delta(f(x))=\frac{1}{|f'(0)|}\delta(x)$$

が成り立つ． 一般に f を $\boldsymbol{R}^n$ の原点の近傍から $\boldsymbol{R}^n$ の原点の近傍への実解析的写像であって $f(0)=0$, $\det df(0)\neq0$ なるものとすれば

$$\delta(f(x))=\frac{1}{|\det df(0)|}\delta(x)$$

が成立する．

［証明］ ここでは一変数の場合のみ証明しよう．まず $f(x)=x\varphi(x)$, $\varphi(x)>0$ となっている場合を考えよう．この時，定義により，

$$\delta(f(x))=-\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x\varphi(x)+i0}-\frac{1}{x\varphi(x)-i0}\right)=\frac{1}{\varphi(x)}\delta(x)=\frac{1}{\varphi(0)}\delta(x)$$

が成立する．ここで $\varphi(0)=|f'(0)|$ より $\delta(f(x))=\dfrac{1}{|f'(0)|}\delta(x)$ となる．

$\varphi(0)<0$ の場合には，第2章命題 2.4.1 により $\delta(f(x))=\delta(-f(x))$ であるから $f(x)$ のかわりに $-f(x)$ を考えればよい．

多変数の場合は各自試みられたい．（証終）

注意． この命題は，座標変換に対する変換性から言うと，内在的(intrinsic)に定義されるのは，δ 函数 $\delta(x)$ と言うより，むしろそれに体積要素 dx を掛けた $\delta(x)dx$ であることを示している．

例. 3.2.4. $\delta(x^2-1)=\frac{1}{2}\delta(x-1)+\frac{1}{2}\delta(x+1)$

実際，$x=1$ の近傍において $X=x-1$, $F(X)=X(2+X)$ と定めれば，

$$\delta(x^2-1)=\delta(F(X))=\frac{1}{|F'(0)|}\delta(X)=\frac{1}{2}\delta(x-1),$$

同様にして $x=-1$ の近傍においても $\delta(x^2-1)=\frac{1}{2}\delta(x+1)$ を得る．合わせて求める結果が得られる．

次の例も上例と同様にして証明される．

例. 3.2.5. $-\pi\leqq\theta\leqq\pi$ に対して $\delta(\cos\theta)=\delta\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+\delta\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right).$

これらの事実を使って以下に積分の有用な計算例をいくつか示そう．

例. 3.2.6. $\int_{R}\delta(t-x^2)\,dx=t_+^{-\frac{1}{2}}$

［証明］ この種の計算には微分方程式を利用する方法が有用である．

$x\delta(x)=0$ なる関係式を微分すれば $x\delta'(x)+\delta(x)=0$ と言う関係式を得る．従って

$$\left(t\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}x\right)\delta(t-x^2)=t\delta'(t-x^2)+\frac{1}{2}\delta(t-x^2)+\frac{1}{2}\{\delta(t-x^2)+$$
$$+x(-2x)\delta'(t-x^2)\}=(t-x^2)\delta'(t-x^2)+\delta(t-x^2)=0$$

が成り立つ．ここで $u(t)=\int\delta(t-x^2)dx$ と置けば，$\left(t\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}\right)u(t)=$

$=\int\left(t\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}\right)\delta(t-x^2)\,dx=\int\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(x\delta(t-x^2))\right)dx=-\frac{1}{2}\{b\delta(t-b^2)-$
$a\delta(t-a^2)\}=0$（ここでa, bは考えているtの値に応じて$t<a^2, b^2$となるように選んだ）．更に$t<0$ ならば明らかに $u(t)=0$ である．従って $u(t)$ は定数倍を除いて $t_+^{-\frac{1}{2}}$ と一致する．次に $u(t)=ct_+^{-\frac{1}{2}}$とおいて定数cを計算しよう．$c=u(1)=$
$=\int\delta(1-x^2)dx=\int\left(\frac{1}{2}\delta(x-1)+\frac{1}{2}\delta(x+1)\right)dx=1$，従って $u(t)=t_+^{-\frac{1}{2}}$である．

（証終）

例. 3.2.7. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{(\cos\theta+\sqrt{-1}\,0)}=-2\pi\sqrt{-1}$

［証明］ 容易に確かめ得るように $A=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{(\cos\theta+i0)}$は有限確定値をとる．ここで $\theta\mapsto\theta+\pi$ なる変数変換を施せば

$$A=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{(-\cos\theta+i0)}$$

を得る．故に

$$2A=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\cos\theta+i0}+\frac{1}{-\cos\theta+i0}\right)d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}(-2\pi i)\delta(\cos\theta)d\theta$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}(-2\pi i)\left(\delta\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+\delta\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right)d\theta=-4\pi i$$

が既述の例より判る．故に

$$A=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{(\cos\theta+i0)}=-2\pi i$$

を得る．

例. 3.2.8. $q(x)$ を $\boldsymbol{R}^n$ 上の非退化な二次型式とする．その符号数 (signature) を $\operatorname{sgn} q$ と記すこととする．この時

$$\int_{S^{n-1}}\frac{\omega(\xi)}{(q(\xi)+\sqrt{-1}\,0)^{\frac{n}{2}}}=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\det(q+\sqrt{-1}\,0)}}$$
$$=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{\exp\left(-\frac{n\sqrt{-1}}{4}(n-\operatorname{sgn}q)\right)}{\sqrt{|\det q|}}$$

が成り立つ．

注意. $q(x)$ が $\boldsymbol{R}^n$ 上の二次型式であるとは，n 次実対称行列 $A=(a_{ij})$ が存在して $q(x)=\langle Ax, x\rangle=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ と表わせることを謂う．$\det A\neq 0$ の時 $q(x)$ は非退化であると言い $\det q=\det A$ と定義する．A の固有値はすべて実

数であり，q が非退化ならば零ではない．正の固有値の個数と負の固有値の個数の差を q の符号数*) と呼ぶ．なお，ここでも命題 3.2.3 におけると同様，

$\dfrac{\omega(\xi)}{(q(\xi)+\sqrt{-1}\,0)^{\frac{n}{2}}}$ を S^{n-1} 上の $(n-1)$-型式と考える．

［証明］ まず $q(x)$ が正定値型式(即ち $\mathrm{sgn}\,q=n$) の場合を考えよう．その時 $q=\langle Ax,x\rangle$，$A={}^tTT$ (T は可逆) と表わせるから

$$\int\frac{\omega(\xi)}{(\langle A\xi,\xi\rangle+\sqrt{-1}\,0)^{\frac{n}{2}}}=\int\frac{\omega(\xi)}{(\langle T\xi,T\xi\rangle+\sqrt{-1}\,0)^{\frac{n}{2}}}=\int\frac{(\det T)^{-1}\omega(\eta)}{(\langle\eta,\eta\rangle+\sqrt{-1}\,0)^{\frac{n}{2}}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\det q}}\int_{\xi\in S^{n-1}}\frac{\omega(\xi)}{(\langle\xi,\xi\rangle)^{\frac{n}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{\det q}}\int_{\xi\in S^{n-1}}\omega(\xi)$$

が成り立つ．ここで $\xi\in S^{n-1}$ ならば $\langle\xi,\xi\rangle=1$，従って特に $(\langle\xi,\xi\rangle+\sqrt{-1}\,0)^{-\frac{n}{2}}$ $=\langle\xi,\xi\rangle^{-\frac{n}{2}}$ が成り立つことを用いた．ところが $\displaystyle\int_{\xi\in S^{n-1}}\omega(\xi)=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ であるから，結局，$\mathrm{sgn}\,q=n$ の時，$\displaystyle\int_{S^{n-1}}\frac{\omega(\xi)}{(q(\xi)+\sqrt{-1}\,0)^{\frac{n}{2}}}=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\det q}}$

を得る．

一般の場合には，まず $q(x)=\langle Ax,x\rangle$ において A の各成分も変数と考えよう．こうすれば $\dfrac{1}{(\langle A\xi,\xi\rangle+\sqrt{-1}\,0)^{\frac{n}{2}}}$ は $\mathrm{Im}A$ が正定値であるような領域からの境界値と考え得る**)．ここで $\mathrm{Re}A$ が正定値であれば

$$\int\frac{\omega(\xi)}{(q(\xi))^{\frac{n}{2}}}=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\det q}}$$

が成立するから，$\mathrm{Re}A$ および $\mathrm{Im}\,A$ のいずれもが正定値である領域から，$\mathrm{Im}\,A$ が正定値である領域にこの関係式を解析接続できる．従って A の各成分の超函数の間の関係式として

---

*) 正の固有値の個数と負の固有値の個数の組を符号数と呼ぶこともある．

**) 厳密に言えば ξ も複素変数と見て $\mathrm{Im}\langle A\xi,\xi\rangle\geqq 0$ なる領域を考察しなければならない．詳しい議論は読者に任せる．

$$\int \frac{\omega(\xi)}{(\langle A\xi,\xi\rangle+\sqrt{-1}\,0)^{\frac{n}{2}}}=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\det(A+\sqrt{-1}\,0)}}$$

を得る．次に $\sqrt{\det(A+\sqrt{-1}\,0)}$ を計算しよう．

$\mathrm{Im}A$ が正定値ならば，$A=T\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}{}^tT$, $\mathrm{Im}\lambda_i>0(1\leqq i\leqq n)$ としてよいから $\sqrt{\det(A(\lambda)+\sqrt{-1}\,0)}=|\det T|\sqrt{\lambda_1+\sqrt{-1}\,0}\cdots\cdots\sqrt{\lambda_n+\sqrt{-1}\,0}$ を得る．$\sqrt{1+\sqrt{-1}\,0}=1$ なる分枝をとれば $\sqrt{-1+\sqrt{-1}\,0}=\exp(\pi\sqrt{-1}/2)$ である．負の固有値の個数$=(n\text{-sgn }q)/2$ に注意することにより $\sqrt{\det(A+\sqrt{-1}\,0}=$ $=\sqrt{|\det A|}\cdot\exp(\pi\sqrt{-1}(\mathrm{n\text{-}sgn}\ q)/4)$ を得る．従って求める結果が得られた．

(証終)

例. 3.2.9. $\displaystyle\int_{R^n}(x_1{}^2+\cdots+x_n{}^2-t)_-^{\lambda}dx_1\cdots dx_n=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}+1\right)}t_+^{\lambda+\frac{n}{2}}$

［証明］ 例 3.2.6 と同様にして左辺を $u(t)$ とおけば $\left(t\dfrac{\partial}{\partial t}-\lambda-\dfrac{n}{2}\right)u(t)=0$ を得る．また，$t<0$ ならば $u(t)=0$ はこの場合も明らかである．従って $u(t)=ct_+^{\lambda+\frac{n}{2}}$ と表わせる．

$$c=u(1)=\int_{R^n}(1-x_1{}^2-\cdots\cdots-x_n{}^2)_+^{\lambda}dx=\int(1-r^2)_+^{\lambda}r^{n-1}dr\omega(\xi)=$$

$$=\int_0^1(1-r^2)^{\lambda}r^{n-1}dr\int_{S^{n-1}}\omega(\xi)=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}+1\right)}$$

であるから求める関係式が得られる． (証終)

§3. ファインマン (Feynman) 積分の解析性

次節以降において，我々は microfunction の理論が線型偏微分方程式論において如何に有用であるかを種々の角度から論じる，それに先立って，それ等とはかなり“毛色”の違った応用として本節では“Feynman 積分の解析性”を論じてみよう．なお，本節の内容を，以下で用いることはないから，この節を読まずに次節に進まれても，次節以降の理解に差し障りは生じない．Feynman 積分とは，以下に説明するように，ある種の規則 (Feynman 規則)によって，各 Feynman 図形に対応させられる，超函数の積分であり，場の量子論に

おいて極めて重要なものである．勿論，本書でその背景，或いはその応用について触れる余裕は全く無いけれども，近時，佐藤(幹夫)先生を中心に“理論物理学の代数解析的方法による研究”という主題が精力的に追及されている現況に鑑みて，その最も初等的な一例を論じることに一節を割くこととした．この方面に特に興味を持たれた読者は物理的背景，その他については，たとえば Eden et al. [1]，中西 [1] 等を，また，超函数論の理論物理学への応用に関しては，王子セミナー報告集 (Publ. RIMS, Kyoto Univ. 12 巻補遺(1977)) を参照されたい．なお，更に余談ながら，超函数論の形成過程において，場の量子論における“分散式 (dispersion relation)”が，また，microfunction の理論の成長の途中，所謂“Edge of the wedge theorem”*) が各々，佐藤先生の潜在意識にあったと思われることを付言しておこう．また，microfunction の理論とは独立に，物理学者もそれにかなり近い概念を得ていたことも注目に値する (Iagolnitzer-Stapp [1] 参照)．超函数論の“自然さ”がこんな所にも顔を出している，とでも言うべきであろうか．

本論に戻ろう．まず，Feynman 図形の定義から始めよう．

定義 3.3.1. **ファインマン** (Feynman) **図形** D は，有限個の点(頂点と呼ぶ) $V_1, \cdots, V_{n'}$, 有限個の(一次元)線分(内線と呼ぶ) $L_1, \cdots, L_N$ および有限個の半直線(外線と呼ぶ) $L_1^e, \cdots, L_n^e$ から成り立つ．ここで $L_l (l=1, \cdots, N)$ の各端点 W_l^+ および W_l^- は $V_j (j=1, \cdots, n')$ のいずれか一つと一致し，しかも $W_l^+ \neq W_l^-$ となっているとする．また，$L_r^e (r=1, \cdots, n)$ の一つ，かつ，ただ一つの端点は V_j $(j=1, \cdots, n')$ のどれか一つと一致するものとする．各外線 L_r^e には 4 次元(実)ベクトル $p_r = (p_{r,0}, p_{r,1}, p_{r,2}, p_{r,3})$ が付随し，各内線 L_l には正定数 $m_l^2 (\geqq 0)$ が付随する．通常，各外線，各内線は方向付けられているものとし，その方向付けを矢印 ——→—— により表わす．この方向付けの下で incidence number $[j:l]$ は次のように定められる：

内線 L_l が頂点 V_j を始点とする時 $[j:l]=-1$，終点とする時 $[j:l]=+1$，L_l の端点が V_j と一致しない時 $[j:l]=0$.

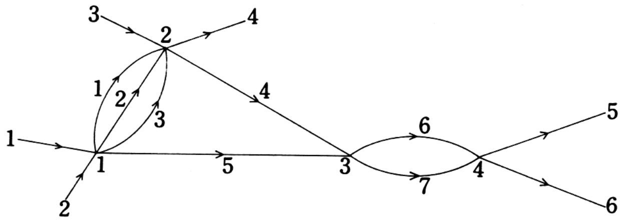
---

*) Edge of the wedge theorem (くさびの刃定理)の超函数論における役割については，森本 [1] が詳しい．又，分散式，くさびの刃定理等の物理的背景については Viadimirov [1] が面白い．

同様にして $[j:r]$ も定められる.

Feynman 図形の例：

図 3.3.1.



(例えば，この例において $[j:l]$ について言えば，$[1:1]=[1:2]=[1:3]=-1$，$[2:1]=[2:2]=[2:3]=+1$，$[3:1]=[3:2]=[3:3]=0, \cdots\cdots$)

注意 1. 以下，無用の複雑化を避けるため，Feynman 図形としては連結なもののみを考えることとする.

注意 2. 実際問題としては $m_l{}^2=0$ となる場合も重要であるが，ここでは議論を簡単にするため $m_l{}^2>0$ の場合に話を限定する.

注意 3. Feynman 図形は，素粒子の反応を図式的に表わしたものである. ここで m_l は，反応に関与する粒子の質量に対応する.

定義 3.3.2. D を Feynman 図形とする. この時，D に対応する**ファインマン** (Feynman)**積分** $F_D(p)$ は(形式的に)次のように定義される.

$$F_D(p)=F_D(p_1, \cdots, p_n) \underset{\text{def}}{=} \int \frac{\prod_{j=1}^{n'} \delta^4(\sum_{r=1}^{n}[j:r]p_r+\sum_{l=1}^{N}[j:l]k_l)}{\prod_{l=1}^{N}(k_l{}^2-m_l{}^2+\sqrt{-1}\,0)} \prod_{l=1}^{N} d^4 k_l \tag{3.3.1}$$

但し，ここで $k_l{}^2=k_{l,0}^2-\sum_{\nu=1}^{3}k_{l,\nu}^2$ とする. (本節では，以下常に4次元ベクトルの二乗としてはこの定義を用いる.)

ここで，上の積分の定義は，全く形式的なものであって，数学的には，その意味は明らかでないことを注意しておく(その点を明確にするのが，いわゆる“繰り込みの理論”である. 詳しくは，例えば中西 [1] 参照). ここでは，microfunction の議論のみによって確定できる場合を考察する. 議論は佐藤 [2] に従う.

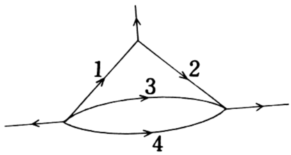
考察を次のような図形にまず限ろう：いかなる j に対してもある r があって

$[j:r]\neq 0$；即ち，各頂点に少くとも一本は外線が触れているとする．

この時，積分の定義より $\sum_r [j:r]p_r$ を改めて $-p_j$ ととり直すことにより，各頂点から一つ，かつ，ただ一つの外線が出ていると仮定しても差し支えはない．(従って，以下，j と r とは同一視する．)

ここで考えている Feynman 図形の例：

図 3.3.2



ここで

$$\mathrm{S.S.}\delta^4(p)=\{(p;\sqrt{-1}u\infty)\in\sqrt{-1}S^*\boldsymbol{R}^4\,|\,p=0,\ \ u\neq 0\}$$

$$\mathrm{S.S.}\left(\frac{1}{k^2-m^2+\sqrt{-1}\,0}\right)=\{(k;\sqrt{-1}v\infty)\in\sqrt{-1}\,S^*\boldsymbol{R}^4\,|\,k^2=m^2,$$

$$v=ck\ \ (c>0)\}^{*)}$$

である．従って第1節定理 3.1.3 を用いて，(3.3.1) の積分の被積分函数は well-defined であり**)，しかもその特異性スペクトルは次の集合 Λ に含まれることが判る．

(3.3.2) $\Lambda=\{(p,k;\sqrt{-1}(u,v)\infty)\in\sqrt{-1}S^*\boldsymbol{R}^{4(n+N)}$；或る $\alpha_l\geqq 0(l=1,\cdots,N)$ があって $-\sum_{j=1}^{n}[j:l]u_j+\alpha_l k_l=v_l,\ \alpha_l(k_l{}^2-m_l{}^2)=0\ \ (l=1,\cdots,N)$ および $-p_j+\sum_{l=1}^{N}[j:l]k_l=0\ \ (j=1,\cdots,n)$ が成立する．$\}$

ここで積分 (3.3.1) に前節定理 3.2.1 を適用することにより $F_D(p)$ の特異性スペクトルの位置を決定したいのであるが，一般には，定理の条件が満たされないから，それは不可能である．そこで，どのような点では (3.3.1) が microfunction として確定し，かつ 0 である (或いは無い) かを考えてみよう．今

$\mathscr{L}\underset{\mathrm{def}}{=}\{(p;\sqrt{-1}u\infty)\in\sqrt{-1}S^*\boldsymbol{R}^{4n}$ ｜ 或る $\alpha_l,k_l(l=1,\cdots,N)$ が存在して

---

*) ここで $m^2\neq 0$ という仮定を用いた．また，Minkowsky 計量により $2k=\mathrm{grad}_k k^2$ という同一視を行った．従って，以下において，余接ベクトルとして $2k_l$ が用いられている場合，厳密には $\mathrm{grad}_{k_l}k_l{}^2$ と記すべきかも知れない．ここでは，物理学者の記法に合わせることとした．

**) 何故か．理由を考えよ．

$$
(3.3.3)\begin{cases}
p_j=\sum_{l=1}^{N}[j:l]k_l & (j=1,\cdots,n) \quad (3.3.3.a)\\
\sum_{j=1}^{n}[j:l]u_j=\alpha_l k_l & (l=1,\cdots,N) \quad (3.3.3.b)\\
\alpha_l(k_l{}^2-m_l{}^2)=0 & (l=1,\cdots,N) \quad (3.3.3.c)\\
\alpha_l\geqq 0 & (l=1,\cdots,N) \quad (3.3.3.d)
\end{cases}
$$

が成立する.}

と定め，更に,

$\mathcal{L}_0=\{(p;\sqrt{-1}u\infty)\in\sqrt{-1}S^*\boldsymbol{R}^{4n}\,|\,(p;\sqrt{-1}u)\in\mathcal{L}$ かつ，対応する α_l はすべて真に正$\}$

と定める．この時，$(p;\sqrt{-1}u)\in\mathcal{L}_0$ ならば，その点の近傍で定理 3.2.1(Ⅱ)の条件が満たされることは，(α_l,k_l) が (p,u) を決めれば(3.3.3)により一意に決まることから明らかである．また，$(p;\sqrt{-1}u\infty)\notin\mathcal{L}$ ならば $(p;\sqrt{-1}u\infty)$の近傍で $F_D(p)$ が microfunction として0であることも明らかである．従って，次の定理が得られる．

定理 3.3.1. 本節で考察の対象とした Feynman 図形 D に対し，$F_D(p)$ は $(\mathcal{L}-\mathcal{L}_0)$ 以外では microfunction として確定し，その台は $\mathcal{L}_0$ に限られる．

注意 1. $\mathcal{L}$ は**ランダウ** (Landau)-**中西多様体**と呼ばれている．Landau と中西が(独立に) Feynman 積分の解析において発見した(1959)ことに因む．

注意 2. 例えば図 3.3.2 において各頂点に u_j と云う4次元ベクトルを対応させてみると，条件(3.3.3.b)は，各内線 l に仮想的に4次元ベクトル k_l を対応させ，更にそれに適当な定数 α_l をかけて，D のループに沿って $\alpha_l k_l$ を足しあわせれば(今の場合，例えば $\alpha_1k_1+\alpha_2k_2-\alpha_3k_3$ を考えれば)，それは0になる，ということを意味している．物理学書では条件(3.3.3.b)はこの形で表現されていることが多い(通常，“閉回路条件”と呼ばれている)．

注意 3. (3.3.3)において，もし $(p;u)$ が解ならば，明らかに $(p;u+a)$ $(a\in\boldsymbol{R}^4)$ も(3.3.3)の解となる．これは，注意2に言うような図式的解釈において，u_j の始点はどこにあってもよいことに対応している．解析的に言えば，$F_D(p)$ が (well-defined であれば)必ず $\delta^4(\sum_{j=1}^{n}p_j)f_D(p)$ という形を持っているという事実の反映である．

注意 4. 以上において，定理 3.2.1 の適用に際しての困難が，積分領域が無

限領域であるために起こったことは示唆的である．実際，“繰り込みの理論”の一つの重要な眼目は，このように k_l が非常に大きい所からくる発散(紫外発散)を如何にして統一的に処理するか，と云う点にある．数学的にこの点を厳密に処理するには，積分領域のコンパクト化を行うのが普通であるが，これについてはやや話が技術的になるので，ここでは省略する．繰り込みを然るべく行えば，$F_D(p)$ は超函数として well-defined であり，しかもその特異性スペクトルは $\mathscr{L}$ に含まれることが知られている．

問． 定義 4.5.2 において，$1/\prod_{l=1}^{N}(k_l{}^2-m_l{}^2+\sqrt{-1}0)$ を $\delta(k_l{}^2-m_l{}^2)\ Y(k_{l,0})$ に置き換えて得られる積分 $I_D(p)$ について，どの程度，同様の議論が可能かを考察せよ．($I_D(p)$ も，又，物理的に重要な函数であり，phase space integral と呼ばれている．この場合，$F_D(p)$ の場合と異り，被積分函数の積が well-defined にならないことがある点に注意されたい．この付近の話題については，河合-Stapp [1] を参照．)

§4. 超局所作用素 (micro-local operator)*) と佐藤の基本定理

M を実解析的多様体，X をその複素化とする．$\varDelta_M=\{(x,y)\in M\times M\,|\,x=y\}$ $\varDelta^a_{\sqrt{-1}S^*M}=\{(x,y;\sqrt{-1}(\xi,\eta)\infty)\,|\,x=y,\ \xi=-\eta\}$ として，$\varDelta_M$ に台を持つ $M\times M$ 上の超函数 $K(x,y)$ であってその特異性スペクトルが $\varDelta^a_{\sqrt{-1}S^*M}$ に含まれるものを考えよう．この時

$$\mathscr{K}(u(y))=\int K(x,y)u(y)dy$$

なる積分作用素 $\mathscr{K}$ は $\mathscr{B}_M$ から $\mathscr{B}_M$ への層準同型を与える．従ってこのような積分作用素は，通常の(有限階)微分作用素の自然な拡張となっている．本節では，この事実に相当する事実を $\mathscr{C}_M$ の場合に考察することを目標とする．実際，$\mathscr{C}_M$ を対象として考えるならば，上の積分変換に用いられた超函数 $K(x,y)$ の台が $\varDelta_M$ に入ると云う条件は不要であろう，と云うことは，本章第1節，第2節の議論より容易に想像されるであろう．例えば，$M=\boldsymbol{R}^1$ として，

$$u(y)\longmapsto\frac{1}{-2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{u(y)}{x-y+\sqrt{-1}0}dy$$

---

*) Micro-local operator という語はかなり定着したと思われるが，超局所作用素なる訳は仮訳である．よい訳語を御教示頂ければ幸いである．

なる変換が $\{(x, \sqrt{-1}dx\infty)\}$ において，microfunction の層 $\mathcal{C}_R$ には層準同型として（実は microfunction に対しては $\{(x, \sqrt{-1}dx\infty\}$ において恒等写像．何者，$\delta(x)=\dfrac{1}{-2\pi\sqrt{-1}}\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{-1}0}-\dfrac{1}{x-\sqrt{-1}0}\right)$）作用することは明らかであろう．以下では，本章第1節および第2節で得られた結果を用いて，$\mathcal{C}_M$ に対して層準同型を引き起こすような積分作用素の（できる限り広い）クラスを設定することを試みる．但し，本節で考察する作用素の枠組は少し一般的過ぎて，代数的考察には馴染まないことが多い．より制限された，しかし，代数的考察に適した枠組が第4章第1節で論じる擬微分作用素 (pseudo-differential operator, micro-differential operator) のそれである．

さて，本論に入る前に記号の準備をしておこう．M, N を実解析的多様体とする．$\varDelta_N$ を N の対角線集合 $\{(x, y)\in N\times N | x=y\}$ として，

$$L_1=\sqrt{-1}S^*(M\times N)-M\times\sqrt{-1}S^*N-\sqrt{-1}S^*M\times N$$

$$L_2=(M\times\varDelta_N)\underset{M\times N\times N}{\times}\sqrt{-1}S^*(M\times N\times N)-\sqrt{-1}S^*_{M\times\varDelta_N}(M\times N\times N)-$$
$$M\times N\times\sqrt{-1}S^*N-\sqrt{-1}S^*(M\times N)\times N$$

$$L_3=\sqrt{-1}S^*(M\times N\times N)-M\times N\times\sqrt{-1}S^*N-\sqrt{-1}S^*(M\times N)\times N$$

と L_1, L_2, L_3 をそれぞれ定める．ここで，次の二つの図式を考えよう．

図 3.4.1.

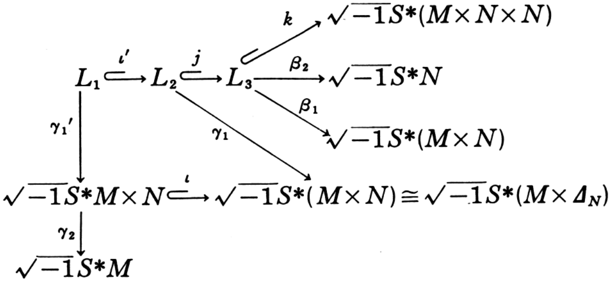
$$\begin{array}{ccc} & \sqrt{-1}S^*(M\times N)-M\times\sqrt{-1}S^*N-\sqrt{-1}S^*M\times N & \\ \swarrow^{p_1} & & \searrow^{p_2{}^a} \\ \sqrt{-1}S^*M & & \sqrt{-1}S^*N \end{array}$$

但し上図において

$p_1((x, y;\ \sqrt{-1}(\xi, \eta)\infty))=(x, \sqrt{-1}\xi\infty)$，$p_2{}^a((x, y;\ \sqrt{-1}(\xi, \eta)\infty))=$
$=(y, -\sqrt{-1}\eta\infty)$

とする．

図 3.4.2.



但し，ι, ι', j, k は自然な埋め込み写像，例えば $\iota'((x, y; \sqrt{-1}(\xi, \eta)\infty))=(x, y, y, ; \sqrt{-1}(\xi, \eta, -\eta)\infty)$, $\gamma_1((x, y, y; \sqrt{-1}(\xi, \eta_1, \eta_2)\infty))=(x, y; \sqrt{-1}(\xi, \eta_1+\eta_2)\infty)$, γ_1' は γ_1 の L_1 への制限，$\beta, {}_1\beta_2, \gamma_2$ は自然な射影とする．

以上の準備の下に，我々の主要定理は次のように述べられる．

定理 3.4.1. M, N を実解析的多様体，Z を $\sqrt{-1}S^*(M\times N)$ の局所閉集合であって $Z\cap M\times\sqrt{-1}S^*N=\phi$ かつ $Z\cap\sqrt{-1}S^*M\times N=\phi$ なる条件を満たすものとする．更に $p_1(Z)$ が $\sqrt{-1}S^*M$ の局所閉集合になっていると仮定する．又，v_N により N の体積要素の作る層を表わすこととする．この時，$K(x, y)dy\in H^0_Z(\sqrt{-1}S^*(M\times N), \mathcal{C}_{M\times N}\otimes v_N)$ に対し，積分作用素 $\mathcal{K}$ を

$$\mathcal{K}(u)=\int_N K(x, y)u(y)dy \quad (u\in\mathcal{C}_N)$$

と定めれば

$$\mathcal{K}: (p_1|_Z)_!(p_2{}^a|_Z)^{-1}\mathcal{C}_N\longrightarrow\mathcal{C}_M$$

なる層準同型写像を得る．

［証明］ まず $\sqrt{-1}S^*(M\times N\times N)$ 上の層 $\mathcal{C}_{M\times N\times N}$ の断面，$w(x, y_1, y_2)$ を $\{y_1=y_2\}$ に制限することを考えよう．この操作は $\sqrt{-1}S^*(M\times\varDelta_N)$ 上の層準同型写像：$\gamma_{1!}(k\circ j)^{-1}\mathcal{C}_{M\times N\times N}\longrightarrow\mathcal{C}_{M\times\varDelta_N}$ を与えることに相当する．これに ι^{-1} を施して $\sqrt{-1}S^*M\times N$ 上の層準同型写像：$\iota^{-1}\gamma_{1!}(k\circ j)^{-1}\mathcal{C}_{M\times N\times N}\to\iota^{-1}\mathcal{C}_{M\times\varDelta_N}$ を得る．一方，容易に確かめ得るように，

$$\iota^{-1}\gamma_{1!}(k\circ j)^{-1}\mathcal{C}_{M\times N\times N}=\gamma'_{1!}\iota'^{-1}(k\circ j)^{-1}\mathcal{C}_{M\times N\times N}=\gamma'_{1!}(k\circ j\circ\iota')^{-1}\mathcal{C}_{M\times N\times N}$$

が成立する．また，$\mathcal{C}_{M\times\varDelta_N}=\mathcal{C}_{M\times N}$ と同一視しても構わない．以下記号の混乱を防ぐために N を N_1, N_2 と書き分けることにする（もちろん $N_1=N_2=N$ である）．以上のことを合わせて

$$\gamma'_{1!}(k\circ j\circ\iota')^{-1}(\mathcal{C}_{M\times N_1\times N_2}\otimes v_{N_1})\longrightarrow\iota^{-1}\mathcal{C}_{M\times N}\otimes v_N$$

なる $\sqrt{-1}S^*M\times N$ 上の層準同型写像を得る．従って $\sqrt{-1}S^*M$ 上の層準同型写像

$$(\gamma_2\circ\gamma_1')_!(k\circ j\circ\iota')^{-1}(\mathcal{O}_{M\times N_1\times N_2}\otimes v_{N_1})\to\gamma_{2!}\iota^{-1}(\mathcal{O}_{M\times N}\otimes v_N)$$

を得る．これは $w(x,y_1,y_2)dy_1$ に $w(x,y,y)dy$ を対応させる写像に他ならない．一方，$w(x,y,y)dy$ に積分 $\int_N w(x,y,y)dy$ を対応させる写像は $\gamma_{2!}\iota^{-1}(\mathcal{O}_{M\times N}\otimes v_N)\to\mathcal{O}_M$ なる層準同型写像を与える．以上により $w(x,y_1,y_2)dy_1$ に積分 $\int_N w(x,y,y)dy$ を対応させる $\sqrt{-1}S^*M$ 上の層準同型写像として

$$(\gamma_2\circ\gamma_1')_!(k\circ j\circ\iota')^{-1}(\mathcal{O}_{M\times N_1\times N_2}\otimes v_{N_1})\longrightarrow\mathcal{O}_M$$

を得た．

さて我々は $w(x,y_1,y_2)dy_1$ として特に $K(x,y_1)u(y_2)dy_1$ なる形のものを考えたいので次に K と u の積を作ることを考えよう．それに対応する L_3 上の層準同型写像は

$$\beta_1^{-1}(\mathcal{O}_{M\times N_1}\otimes v_{N_1})\times\beta_2^{-1}\mathcal{O}_{N_2}\longrightarrow k^{-1}\mathcal{O}_{M\times N_1\times N_2}\otimes v_{N_1}$$

により与えられる．従って $K(x,y_1)dy_1\in H^0_Z(M\times N_1,\mathcal{O}_{M\times N_1}\otimes v_{N_1})$ を与えれば，

$$\beta_2^{-1}\mathcal{O}_{N_2}\longrightarrow\mathcal{H}^0_{\beta_1^{-1}(Z)}(k^{-1}\mathcal{O}_{M\times N_1\times N_2}\otimes v_{N_1})$$

なる層準同型写像が得られる．これ等により

$$\begin{aligned}(\beta_2\circ j\circ\iota')^{-1}\mathcal{O}_{N_2}&=\iota'^{-1}j^{-1}\beta_2^{-1}\mathcal{O}_{N_2}\longrightarrow\iota'^{-1}j^{-1}\mathcal{H}^0_{\beta_1^{-1}(Z)}(k^{-1}\mathcal{O}_{M\times N_1\times N_2}\otimes v_{N_1})\\&\longrightarrow\mathcal{H}^0_{\iota'^{-1}j^{-1}\beta_1^{-1}(Z)}(\iota'^{-1}j^{-1}k^{-1}(\mathcal{O}_{M\times N_1\times N_2}\otimes v_{N_1}))=\\&=\mathcal{H}^0_{(\beta_1\circ j\circ\iota')^{-1}(Z)}((k\circ j\circ\iota')^{-1}(\mathcal{O}_{M\times N_1\times N_2}\otimes v_{N_1}))\end{aligned}$$

なる層準同型写像を得る．ここで $p_1=\gamma_2\circ\gamma_1'$，$\beta_1\circ j\circ\iota'=\mathrm{id}$ および $\beta_2\circ j\circ\iota'=p_2{}^a$ に注意すれば，結局 $p_{1!}(k\circ j\circ\iota')^{-1}(\mathcal{O}_{M\times N_1\times N_2}\otimes v_{N_1})\longrightarrow\mathcal{O}_M$ および $(p_2{}^a)^{-1}\mathcal{O}_{N_2}\to\mathcal{H}^0_Z(k\circ j\circ\iota')^{-1}(\mathcal{O}_{M\times N_1\times N_2}\otimes v_{N_1})$ なる二つの層準同型写像を得る．従って後者を Z に制限して $p_{1!}$ を施し，更に前者を組合せることによって $\sqrt{-1}S^*M$ 上での層準同型写像：$(p_1|_Z)_!(p_2{}^a|_Z)^{-1}\mathcal{O}_N\to\mathcal{O}_M$ が得られる．これが $K(x,y)dy\in H^0_Z(\sqrt{-1}S^*(M\times N),\ \mathcal{O}_{M\times N}\otimes v_N)$ を与えた時，$u\in\mathcal{O}_N$ に対して $\int K(x,y)u(y)dy$ を対応させる操作に他ならない．　(証終)

系． M を実解析的多様体とする．この時，

$$K(x,y)dy\in\mathcal{H}^0_{\sqrt{-1}S^*_M(M\times M)}(\mathcal{O}_{M\times M}\otimes v_M)$$

に対して $\mathcal{K}(u)=\int K(x,y)u(y)dy$ なる積分作用素は $\mathcal{O}_M$ から $\mathcal{O}_M$ への層準同

型写像を定義する.

［証明］ 定理 3.4.1 において $M=N$ とおけば $(p_1|z)_!(p_2{}^a|z)^{-1}\mathcal{C}_M\to\mathcal{C}_M$ なる層準同型写像が得られる. この場合 $p_1|z$, $p_2{}^a|z$ は同型写像 (従って特に固有写像)であり, しかも $p_1|z\circ(p_2{}^a|z)^{-1}$ は $\sqrt{-1}S^*M$ 上の恒等写像を与えるから $(p_1|z)_!(p_2{}^a|z)^{-1}\mathcal{C}_M=\mathcal{C}_M$ が成り立つ. (証終)

注意. 以下で $K(x,x')dx'$ を超局所作用素 $\mathcal{K}$ の核函数と呼ぶことがある. また, 混乱の恐れがない時には, 核函数と対応する超局所作用素を同一視して同じ記号を用いることがある.

定義 3.4.1. $\mathcal{H}^0_{\sqrt{-1}S^*_M(M\times M)}(\mathcal{C}_{M\times M}\otimes v_M)$ を**超局所作用素** (microlocal operator) の層と呼び, $\mathcal{L}_M$ と略記する.

定理 3.4.1 の系により, 次の系が上の定義より直ちに従うことは明らかであろう.

系. (1) $\mathcal{L}_M$ は $\mathcal{C}_M$ に層準同型として作用する.

(2) $K_1(x,y)dy$ および $K_2(x,y)dy$ を $\mathcal{L}_M$ の元とする. K_1, K_2 によって定まる積分作用素を各々 $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ とすれば, $\mathcal{K}_1\circ\mathcal{K}_2$ は $(\int K_1(x,y')K_2(y',y)dy')dy$ を核函数とする超局所作用素である.

(3) $\mathcal{L}_M$ は $\delta(x-y)dy$ を単位元として持つ環である. また, この単位元は $\mathcal{C}_M$ に恒等写像として作用する.

定義 3.4.2. (m 階線型)微分作用素 $P(x,D_x)=\sum_{|\alpha|\leq m}a_\alpha(x)D_x^\alpha$ *) に対し, その**主要表象** (principal symbol) $\sigma(P)(x,\xi)$ を $\sigma(P)(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(x)\xi^\alpha(\in\mathcal{O}_{T^*M})$ と定義する.

注意 1. 本書には非線型微分作用素は殆ど現われないので, 以下, 線型微分作用素を略して単に微分作用素と呼ぶことが多い.

注意 2. 微分作用素 $P(x,D_x)$ は明らかに $P(x,D_x)\delta(x-y)dy$ を核函数とする超局所作用素である.

注意 3. $P(x,D_x)$ の低階の項は座標変換に対して安定ではないけれども, 主

---

*) ここで $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in(\boldsymbol{Z}^+\sqcup\{0\})^n$ に対し $D_x{}^\alpha=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$ とする. 又, $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$ であった. 同様に $\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}$ を ξ^α と略記する.

要表象は座標変換に関して不変な概念である.

以下，本節では John[1], [2] による楕円型方程式の基本解の構成法を“microlocalize”して得られた，所謂“佐藤の基本定理”(定理 3.4.2)の証明を与えるこるを目標とする．その証明のために，微分方程式論において最も基本的な，コーシー・コヴァレフスキー (Cauchy-Kovalevsky) の定理を思い出しておこう．なお，ここでは線型方程式に話を限るが，Cauchy-Kovalevsky の定理自身は非線型方程式に対しても成り立つことを注意しておく.

定理 3.4.2.(コーシー・コヴァレフスキー) $\phi(x)$ を $x=x_0$ の近傍で定義された実解析函数であって超曲面 $\{x\,|\,\phi(x)=0\}$ が微分作用素 $P(x, D_x)$ に関して $x=x_0$ で**非特性的** (non-characteristic), 即ち $\sigma(P)(x_0, d\phi(x_0))\neq 0)$ であるものとする．その時 $x=x_0$ の近傍で定義された実解析函数 f, ϕ に対して

$$Pu=f,\ u\equiv\varphi \bmod \phi^m\quad (\text{但し } m \text{ は } P(x, D) \text{ の階数})$$

を満たす実解析函数 $u(x)$ が唯一つ存在する.

証明については例えば大島-小松 [1] を参照されたい.

さて，Cauchy-Kovalevsky の定理を用いて，“佐藤の基本定理”を証明しよう．この定理が，すべての解析学者に microfunction の理論の深さと有用性を理解させたと言っても過言ではない程，美しくも又重要な結果である．今や，その証明等専門家の意識には一々のぼらない程基本的な定理である．一つの分野(今の場合，線型偏微分方程式論)に革命を起こした，と言うにふさわしい定理である.

定理 3.4.3.(佐藤) (有限階) 線型微分作用素 $P(x, D_x)$ は $\{(x, \sqrt{-1}\,\xi\infty)\in\sqrt{-1}S^*M \mid \sigma(P)(x, \sqrt{-1}\xi)\neq 0\}$ において $\mathscr{L}_M$ の中に両側逆を持つ.

注意. 後述するように(第4章定理 4.1.6 系)，より強く，上の定理に言う両側逆は擬微分作用素になっていることが知られている.

［証明］ 問題は局所的であるから適当に局所座標系をとって $x=0$ の近傍で考える．$\sigma(P)(0, \sqrt{-1}\xi_0)\neq 0$ としよう．$(x, \xi, p)=(0, \xi_0, 0)\in S^*M\times\boldsymbol{R}$ の近傍で定義された (x, ξ, p) の実解析函数 $u(x, \xi, p)$ で

$$P(x, D_x)u(x, \xi, p)\equiv 1,\ \ u\equiv 0 \bmod (\langle x, \xi\rangle - p)^m$$

を満たすものが存在することは定理 3.4.2 により保証される ($\sigma(P)(0, \xi_0)=(-\sqrt{-1})^m\sigma(P)(0, \sqrt{-1}\,\xi_0)\neq 0$ に注意)．なお，このような解 $u(x, \xi, p)$ を Leray

に従って unitary solution と謂うこともある．又，unitary solution を然るべく重ね合わせて基本解を構成する以下の議論を“**ドュアメル** (Duhamel) **の原理**を用いて基本解を構成する”と謂うこともある．(一般に，パラメタに依存する初期面に対し，$Pu=0$ の初期値問題を然るべく設定し，そのような解をパラメタについて積分することにより，非斉次な方程式 $Pv=f$ の解 v を得ることを“Duhamel の原理”と謂う.) さて，上でその存在が保証された $u(x,\xi,p)$ に対し，$v(x,\xi,p)=u(x,\xi,p)Y(\langle x,\xi\rangle-p)$ と定める．ここで $Y(t)$ はヘビサイド函数である．

まず次の二つの補題を準備しよう．

補題 1. $x'=(x_2,\cdots,x_n)$ と略記する時，

$$D_1^j(u(x)Y(x_1))=(D_1^ju(x))Y(x_1)+\sum_{k=1}^{j}D_1^{j-k}u(0,x')\delta^{(k-1)}(x_1)$$

が成立する．

［証明］ $j=0,1$ の時は明らかに成り立つから j に関する帰納法で証明しよう．$j=j_0$ の時，成り立つとすれば

$$D_1^{j_0+1}(u(x)Y(x_1))=(D_1^{j_0+1}u(x))Y(x_1)+(D_1^{j_0}u(x))\delta(x_1)+$$
$$\sum_{k=1}^{j_0}D_1^{j_0-k}u(0,x')\delta^{(k)}(x_1)=D_1^{j_0+1}u(x))Y(x_1)+\sum_{k=1}^{j_0+1}D_1^{j_0+1-k}u(0,x')\delta^{(k-1)}(x_1)$$

となるから，帰納法が進行する．　(補題 1 の証終)

補題 2. $\sigma(P)(x,d\phi(x))\neq0$ とする．その時，$P(x,D)u(x)=1$，かつ $u\equiv0 \bmod \phi(x)^m$ なる実解析函数 $u(x)$ に対して

$$P(x,D_x)(u(x)Y(\phi(x)))=Y(\phi(x))$$

が成り立つ．

［証明］ $d\phi\neq0$ だから座標変換により $\phi=x_1$ と仮定してよい．$P(x,D)$ を

$$P(x,D)=\sum_{j=0}^{m}A_j(x,D')D_1^j,\quad A_j(x,D')=\sum_{\alpha'\in Z_+^{n-1}}a_{\alpha'}(x)D'^{\alpha'},\quad D'=(D_2,\cdots,D_n)$$

と表わせば，補題 1 により

$$P(x,D)(u(x)Y(x_1))=\sum_{j=0}^{m}A_j(x,D')D_1{}^j(uY(x_1))=\sum_{j=0}^{m}A_j(x,D')(D_1{}^ju(x))Y(x_1)+$$
$$+\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=1}^{j}A_j(x,D')(D_1{}^{j-k}u(0,x'))\delta^{(k-1)}(x_1)$$

となる．一方，$u\equiv0 \bmod x_1{}^m$ かつ $j-k<m$ であるから $D_1^{j-k}u(0,x')=0$ である．従って $Pu=1$ に注意して

$$P(x,D)(u(x)Y(x_1))=\sum_{j=0}^{m}A_j(x,D')(D_1{}^ju(x))Y(x_1)=(Pu)Y(x_1)=Y(x_1)$$

を得る.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(補題2の証終)

さて補題2によって

$$P(x, D)v(x, \xi, p) = Y(\langle x, \xi\rangle - p)$$

が得られる. この両辺を p について n 回微分すると

$$P(x, D_x)(\partial/\partial p)^n v(x, \xi, p) = (-1)^n \delta^{(n-1)}(\langle x, \xi\rangle - p)$$

を得るから $w(x, \xi, p) = (\partial/\partial p)^n v(x, \xi, p)$ とおけば

$$P(x, D_x)w(x, \xi, p) = (-1)^n \delta^{(n-1)}(\langle x, \xi\rangle - p)$$

を得る. ここで $p = \langle x', \xi\rangle$ とおいて

$$P(x, D_x)w(x, \xi, \langle x', \xi\rangle) = (-1)^n \delta^{(n-1)}(\langle x - x', \xi\rangle)$$

る得る. ここで次の補題に注意しよう.

補題 3. $\delta(x)$ は microfunction として(即ち $\mathrm{sp}\delta(x)$) は, $(0, \sqrt{-1}\,\xi_0\infty)$ の近傍で

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(-2\pi\sqrt{-1})^n}\int \delta^{(n-1)}(\langle x, \xi\rangle)\chi_U(\xi)\omega(\xi)$$

に等しい. 但しここで U は $\xi_0 \in S^{n-1}$ の適当な近傍である. $\chi_U(\xi)$ は U 上で 1, $\overline{U}$ の外で 0 となる函数である.

［証明］ $\delta^{(n-1)}(t) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(-2\pi\sqrt{-1})}\left(\dfrac{1}{(t+\sqrt{-1}\,0)^n} - \dfrac{1}{(t-\sqrt{-1}\,0)^n}\right)$

と命題 3.2.3 を合わせれば容易に得られる. 詳しくは, 読者自身, 演習問題として試みられたい.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(補題3の証終)

さて $P(x,D)w(x,\xi,\langle x', \xi\rangle) = (-1)^n \delta^{(n-1)}(\langle x - x', \xi\rangle)$ の両辺を ξ に関して ξ_0 の近傍 U で積分すれば, 補題3により $(0, 0; \sqrt{-1}\,\langle \xi_0, d(x-x')\rangle)$ の近傍において

$$P(x, D_x)\int_U w(x, \xi, \langle x', \xi\rangle)\omega(\xi) = (-1)^n \int_U \delta^{(n-1)}(\langle x - x', \xi\rangle)\omega(\xi) =$$
$$= (-2\pi\sqrt{-1})^{n-1}\delta(x - x')$$

を得る. 従って

$$E(x, x') = \frac{1}{(-2\pi\sqrt{-1})^{n-1}}\int_U w(x, \xi, \langle x', \xi\rangle)\omega(\xi)$$

と定めれば, $(0, 0; \sqrt{-1}\,\langle \xi_0, d(x-x')\rangle\infty)$ の近傍において

$$P(x, D_x)E(x, x') = \delta(x - x')$$

が (microfunction に対する等式として)成立する. 従って

$(0, 0; \sqrt{-1}\,\langle \xi_0, d(x-x')\rangle\infty)$ の十分小さい近傍では $E(x, x')dx'$ の特異性ス

ペクトルが $\sqrt{-1}S^*_M(M\times M)$ に含まれることを示せば, $E(x,x')dx'$ が $\mathcal{L}_M$ の元であることが判る. それを E と記せば, $PE=1$, 即ち E は P の右逆元である. 実際 $PE=(\int P(x,D_x)\delta(x-y)E(y,x')dy)dx'=P(x,D_x)E(x,x')dx'=$ $=\delta(x-x')dx'$が成り立つからである. 次に $E(x,x')dx'$ の特異性スペクトルを調べよう. まず u の定義により, $u(x,\xi,p)$ は $(x,\xi,p)=(0,\xi_0,0)$ の近傍で定義された実解析函数である. 従って $v(x,\xi,p)=u(x,\xi,p)Y(\langle x,\xi\rangle-p)$ は (x,ξ,p) $=(0,\xi_0,0)$ の近傍で定義された超函数であってその特異性スペクトルは $\{\langle x,\xi\rangle=p,\ \pm\sqrt{-1}\,d(\langle x,,\xi\rangle-p)\infty\}$ に限られる. 従って $w(x,\xi,p)=$ $(\partial/\partial p)^n v(x,\xi,p)$ についても同様である. 故に $w(x,\xi,\langle x',\xi\rangle)$ は $(x,x',\xi)=$ $(0,0,\xi_0)$ の近傍で定義された超函数であって, その特異性スペクトルは $\{\langle x-x',\xi\rangle=0,\ \pm\sqrt{-1}\,d(\langle x-x',\xi\rangle)\infty\}$ に限られる. 故に定理 3.2.1 により, $E(x,x')=\int_U w(x,\xi,\langle x',\xi\rangle)\omega(\xi)$ の特異性スペクトルは $(0,0;\sqrt{-1}\langle\xi_0,d(x-x')\rangle\infty)$ の十分小さな近傍では $\{x=x',\sqrt{-1}\langle\xi,d(x-x')\rangle\infty\}$ に限られる. よって定義により $E(x,x')dx'$ は $(0,\sqrt{-1}\langle\xi_0,dx\rangle\infty)$ の近傍で $\mathcal{L}_M$ の元を定義する.

次に $E'P=1$ となる超局所作用素 E' の存在を示そう. 以下体積要素 $dx=|dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n|$ を一つ固定して考えよう. ここで以下の議論を円滑に行うために共軛作用素の概念を導入しておこう.

定義 3.4.3. 超局所作用素 $\mathcal{K}$ の核函数 $K(x,x')dx'$ とする. この時, $K(x',x)dx'$ を核函数とする超局所作用素を $\mathcal{K}$ の**共軛作用素** (conjugate operator)*) と謂い, $\mathcal{K}^*$ と記す.

注意 1. $\mathcal{K}$ が $(x_0,\sqrt{-1}\langle\xi_0,dx\rangle\infty)$ の近傍で定義された超局所作用素であれば, $\mathcal{K}^*$ は $(x_0,-\sqrt{-1}\langle\xi_0,dx\rangle\infty)$ の近傍で定義された超局所作用素である. 即ち, 共軛作用素をとる操作 * は $\mathcal{L}_M\to\mathcal{L}^a_M$ なる層同型写像を与える. 但し, a は対蹠点写像 : $(x,\sqrt{-1}\langle\xi,dx\rangle\infty)\mapsto(x,-\sqrt{-1}\langle\xi,dx\rangle\infty)$ であり, 定義により, $\mathcal{L}^a_M=a^*\mathcal{L}_M(=a^{-1}\mathcal{L}_M)$ である.

---

*) 随伴作用素(adjoint operator)とも謂う. 又, $K(x'.x)dx'$ の複素共軛に対応する作用素を共軛作用素と呼ぶこともあるが, 本書では複素共軛はとらない. 尚, “共役” と云う字ではどうも “conjugate” の感じがしないので, “共軛” を用い続けることとする.

注意 2. 共軛作用素の概念は体積要素のとり方に依存する.

共軛作用素を作る操作 * に対して次の補題が成立する.

補題 4. (1) $\mathscr{K}, \mathscr{K}_1, \mathscr{K}_2$ を各々 $(x_0, \sqrt{-1}\langle\xi_0, dx\rangle\infty)$ の近傍で定義された超局所作用素とする. この時, $(\mathscr{K}_1\mathscr{K}_2)^*=\mathscr{K}_2{}^*\mathscr{K}_1{}^*$ および $(\mathscr{K}^*)^*=\mathscr{K}$ が成り立つ.

(2) 線型微分作用素 $P(x, D_x)=\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)D_x^\alpha$ に対して, その共軛作用素 $P^*(x, D_x)$ は再び線型微分作用素であって $\sum_{|\alpha|\leq m}(-1)^{|\alpha|}D_x^\alpha(a_\alpha(x)\cdot)$ により与えられる. ここで $(a_\alpha(x)\cdot)$ は $a_\alpha(x)$ による掛け算を意味する.

［証明］ (1)は定義より明らかである. (2)を示そう. まず掛け算作用素 $a_\alpha(x)\cdot$ の共軛作用素を求めよう.

$a_\alpha(x)\cdot$に対応する核函数は $a(x)\delta(x-x')$ であるから, $a(x)\cdot$ の共軛作用素 $(a(x)\cdot)^*$ に対応する核函数は定義により $a(x')\delta(x'-x)$ である. 然るに $a(x')\delta(x'-x)=a(x)\delta(x-x')$ であるから, $(a(x)\cdot)^*=a(x)\cdot$ が成立する. 次に, $D_j=\partial/\partial x_j$ の共軛作用素を求めよう. D_j に対応する核函数は $(\partial/\partial x_j)\delta(x-x')$ であるから, D_j^* に対応する核函数は定義により $(\partial/\partial x_j{}')\delta(x'-x)=$
$=(\partial/\partial x_j{}')\delta(x_1'-x_1)\delta(x_2'-x_2)\cdots\delta(x_n'-x_n))=-(\partial/\partial x_j)\delta(x_1-x_1')\delta(x_2-x_2')\cdots$
$\delta(x_n-x_n')$である. 従って $(D_x^\alpha)^*=(D_1^{\alpha_1}\cdots\cdots D_n^{\alpha_n})^*=(-D_n)^{\alpha_n}\cdots(-D_1)^{\alpha_1}=$
$(-1)^{|\alpha|}D_x^\alpha$ が成り立つ. 故に $P^*(x, D_x)=\sum_{|\alpha|\leq m}(a_\alpha(x)D^\alpha)^*=\sum_{|\alpha|\leq m}(D^\alpha)^*(a_\alpha(x)\cdot)^*=$
$=\sum_{|\alpha|\leq m}(-1)^{|\alpha|}D(a_\alpha(x)\cdot)$ を得る. （補題 4 の証終）

定理 3.4.3 の証明に戻ろう. 我々は, 既に, $\sigma(P)(x, \sqrt{-1}\xi)\neq 0$ ならば $PE=1$ となる超局所作用素 E が $(x, \sqrt{-1}\langle\xi, dx\rangle\infty)$ の近傍で存在することを知っている. ここで P^* を P の共軛作用素とすると $\sigma(P^*)(x, -\sqrt{-1}\xi)=\sigma(P)(x, \sqrt{-1}\xi)\neq 0$ が成り立つから, $P^*E'=1$ となる超局所作用素 E' が $(x, -\sqrt{-1}\langle\xi, dx\rangle\infty)$ の近傍で存在することが判る. ここで E' の共軛作用素 $(E')^*$ を考えれば, $(E')^*$ は $(x, \sqrt{-1}\langle\xi, dx\rangle\infty)$ の近傍で定義された超局所作用素である. 又, $(E')^*P=(E')^*P^{**}=(P^*E')^*=1$ 故, $(E')^*$ は P の左逆作用素になっている. 更に $(E')^*=(E')^*PE=(E'^*P)E=E$ が成立する. 以上により $P(x, Dx)$ に対して $PE=EP=1$ となる両側逆作用素 E が $\mathscr{L}_M$ の元として存在することが証明された. （定理 3.4.3 の証終）

注意. 定理 3.4.3 の証明で最も重要な点は, $P(x, D_x)E(x, x')=\delta(x-x')$ と

なる超函数を構成する点にあった．このような超函数 $E(x,x')$ を微分作用素 $P(x,D_x)$ に対する**素解** (elementary solution)，或いは**基本解** (fundamental solution) と呼ぶことがある．任意の超函数 $f(x)$ に対して $f(x)=\int f(x')\delta(x-x')dx'$ が成り立つから，重畳の原理により，$u(x)=\int E(x,x')f(x')dx'$ (が意味を持ちかつ微分と積分の順序交換が許される限り) が $P(x,D_x)u(x)=f(x)$ の (一つの) 解を与えることになる．線型微分方程式の局所理論において，素解の構成は最も有効な方法論の一つである．

定義 3.4.4. 線型微分作用素 $P(x,D_x)$ が次の条件を満たす時，P は点 x_0 で**楕円型** (elliptic)*) (作用素) であると謂う：

$$\text{任意の } \xi\in \boldsymbol{R}^n-\{0\} \text{ に対して } \sigma(P)(x_0,\sqrt{-1}\xi)\neq 0 \text{ が成立する．}$$

定理 3.4.4. (i) 実解析的多様体 M 上の超函数 $u(x)$, $f(x)$ が関係式 $P(x,D_x)u(x)=f(x)$ を満たすならば，

$$\text{S.S.}u\subset\{(x,\sqrt{-1}\langle\xi,dx\rangle\infty)\in\sqrt{-1}S^*M \mid \sigma(P)(x,\sqrt{-1}\xi)=0\}\cup\text{S.S.}f$$

が成立する．特に $P(x,D_x)$ が M の任意の点で楕円型であり，$f(x)$ が実解析函数ならば，$u(x)$ も実解析函数である**)．

(ii) $P(x,D_x)$ が点 x_0 で楕円型であれば $P\colon \mathcal{B}_{x_0}\to\mathcal{B}_{x_0}$ は全射的である．

［証明］ まず (i) を証明しよう．$P(x,D_x)u(x)=f(x)$ なる関係式より，$P(x,D_x)\mathrm{sp}(u(x))=\mathrm{sp}(f(x))$ を得る．定理 3.4.3 により，$\sigma(P)(x,\sqrt{-1}\xi)\neq 0$ ならば，$EP=1$ なる超局所作用素が存在し，従って，$\mathrm{sp}(u)=(EP)\mathrm{sp}(u)=E\mathrm{sp}(f)$ が成立する．従って，

$$\text{S.S. }u\subset\{(x,\sqrt{-1}\xi\infty)\in\sqrt{-1}S^*M/\sigma(P)(x,\sqrt{-1}\xi)\neq 0\}\cup\text{S.S.}f$$

が成立する．

---

*) この名称は，P が二階の方程式の時，$\sigma(P)$ は ξ についての二次式となるから，二次型式の分類に示唆されて導入されたものであろう．実際，解析学者が高階の方程式についても意味ある結果を提出できるようになったのは，近々第二次大戦以降のことと言ってもさして過言ではあるまい．

**) この最後の事実を "Weyl の補題" が成り立つ，と謂うこともある．これは Hilbert の第 19 問題 (Hilbert [1]) に関係して，また，調和積分論等への応用からも，偏微分方程式論において最も興味深い結果の一つであり，線型偏微分方程式の一般理論の萌芽となったものであった．

次に (ii) を証明しよう．定理 3.4.3 により，各点 $(x_0, \sqrt{-1}\xi\infty)$ の近傍で $P(x, D_x)$ の右逆作用素 E が存在する．同時に左逆作用素も存在するから，(右)逆作用素は一意である．よって P の(右)逆作用素は $\pi^{-1}(x_0)$ の近傍で(ファイバー方向については大域的に)存在する．ここで，$\mathscr{B} \xrightarrow{\text{sp}} \pi_* \mathscr{C} \to 0$ (完全) に注意すれば，$E\text{sp}(f) = \text{sp}(u)$ となる $u \in \mathscr{B}_{x_0}$ が存在することが判る．このような u に対して，$\text{sp}(Pu-f)=0$ が $\pi^{-1}(x_0)$ の近傍で成立するから，(i) により $g \underset{\text{def}}{=} Pu-f$ は x_0 の近傍で実解析函数である．他方，定理 3.4.2 により $Pv=g$ となる実解析函数 v が x_0 の近傍で存在することが判る．従って，$u-v$ を改めて v ととれば，$Pu=f$ が x_0 の近傍で満たされる．

注意．定理 3.4.4 (1) により，$P(x, D_x)u(x)=0$ の解 $u(x)$ の特異性スペクトルは $\{(x, \sqrt{-1}\xi\infty) \in \sqrt{-1}S^*M \mid \sigma(P)(x, \sqrt{-1}\xi)=0\}$ に含まれる．従って，この多様体(**特性多様体***) の実点)上で $Pu=0$ の解の構造を調べることが，線型微分方程式論の主目標として設定される．このような問題意識は定数係数の場合にはかなり広く存在したと思われる (所謂 "Ehrenpreis の基本原理 (Ehrenpreis [1] 参照))けれど，変数係数の場合にまで，このような問題意識を持つことが可能になったのは，偏に，microfunction の理論の出現のお蔭と言って良いであろう．(勿論，最高級の人々(例えば Hörmander [1]，溝畑 [1] 等)の仕事はこのような問題意識が implicit には存在していたことを示唆するけれど，それは名人芸とも謂うべきもので，誰でもが持てるものでは無かった．)

§5.　波動方程式

本節では，次節で論じる双曲型方程式の最も基本的な例である波動方程式について初期値問題を論じる．

一般に $P(x, D_x)$ を m 階の線型微分作用素とする時，超函数 $\varphi_\nu(x')$ $(0 \leqq \nu$

---

*)　一般に，$\sigma(P)(x, \xi)=0$ なる方程式の零点集合を P の特性多様体と謂う．

†)　(次頁への脚註) 超函数 $f(x)$ と $\varphi_\nu(x')$ $(\nu=0, \dots, m-1)$ を与えて

$$\begin{cases} P(x, D_x)u(x) = f(x) \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)^\nu u \Big|_{x_1=0} = \varphi_\nu(x') \quad (0 \leqq \nu \leqq m-1) \end{cases}$$

なる関係式を満たす $u(x)$ を求める問題を Cauchy 問題と謂うこともある．しかし，本書では取り扱わないが，過剰決定系の場合の問題の定式化を勘案してここでは $f(x)=0$ に限っておくこととする．

$\leqq m-1$) (但し $x'=(x_2, \cdots, x_n)$) を与えて,

$$\begin{cases} P(x, D_x)u(x)=0 \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\nu} u\Big|_{x_1=0}=\varphi_\nu(x') \quad (0\leqq \nu \leqq m-1) \end{cases}$$

を満たす超函数 $u(x)$ を求める問題を**コーシー** (Cauchy) **問題**, 又は**初期値問題**と謂い, $\varphi_\nu(x')(0\leqq\nu\leqq m-1)$ をその Cauchy データ, 又は初期値と謂う†). 初期値として $\{\varphi_\nu(x')\}_{\nu=0}^{m-1}$ を考える理由は次の命題により了解されるであろう.

命題 3.5.1. $P(x, D_x)$ を m 階線型微分作用素とする. 超平面 $\{x|x_1=0\}$ は P に関して非特性的である (即ち, $x_1=0$ ならば $\sigma(P)(x, dx_1)\neq 0$ が成り立つ) と仮定しよう. この時超函数 $u(x)$ が $P(x, D_x)u(x)=0$ を満たすならば, $D_1^\nu u(x)|_{x_1=0}$ なる制限は任意の $\nu(\in \boldsymbol{Z}^+\cup\{0\})$ に対して well-defined であり, $D_1^\nu u(x)|_{x_1=0}$ $(\nu=0, \cdots, m-1)$ により, すべての $D_1^\nu u(x)|_{x_1=0}$ が一意に定まる.

[証明] $\{x|x_1=0\}$ が P に関して非特性的であると云う仮定より, 定理 3.4.4 を用いて, $x_1=0$ ならば $(x, \pm\sqrt{-1}dx_1\infty)\notin$S.S. $u(x)$ と云う事実が成立する. 従って任意の ν に対して $x_1=0$ ならば $(x, \pm\sqrt{-1}dx_1\infty)\notin$ S.S.$D_1^\nu u(x)$ が成り立つ. 故に定理 3.1.3 により $D_1^\nu u(x)|_{x_1=0}$ は well-defined である. 次に命題の後半の一意性に関する主張を証明しよう. $P(x, D_x)=\sum_{|\alpha|\leqq m} a_\alpha(x)D_x^\alpha=$ $=\sum_{j=0}^{m} A_j(x, D')D_1{}^j$ と表わした時, $\sigma(P)(0, dx_1)=a_{(m,0,\cdots 0)}(0)\neq 0$ であるから $A_m(x, D')=a_{(m,0,\cdots,0)}(x)\neq 0$ である. 従って $Pu=\sum_{j=0}^{m} A_j(x, D')D_1^j u=0$ より, $a_{(m,0,\cdots,0)}(x)D_1^m u=-\sum_{j=0}^{m-1} A_j(x, D')D_1^j u$ となるから, $D_1^m u|_{x_1=0}=$ $-\dfrac{1}{a_{(m,0,\cdots,0)}(x')}\sum_{j=0}^{m-1} A_j(0, x', D')\ D_1^j u(x)|_{x_1=0}$ となる. 従って, $D_1^m u|_{x_1=0}$ が $D_1^\nu u(x)|_{x_1=0}(0\leqq\nu\leqq m-1)$ から一意に定まることが判った. 同様にして $D_1^{m+l}u|_{x_1=0}(l\geqq 0)$ までが得られれば

$$D_1^{m+l+1}u=-D_1^{l+1}\left(\frac{1}{a_{(m,0,\cdots,0)}(x')}\sum_{j=0}^{m-1} A_j(0, x', D')D_1{}^j u\right)$$

を用いて $D_1{}^{m+l+1}u|_{x_1=0}$ も定まる. (証終)

注意. 上の証明の前半で述べたように, $(x, \pm\sqrt{-1}dx_1\infty)\notin$S.S. $u(x)$ が成り立つならば, $D_1^\nu u(x)|_{x_1=0}$ は常に well-defined である. このような性質, 即ち, $(x, \pm\sqrt{-1}dx_1\infty)\notin$S.S.$u(x)$, と云う性質を持つ超函数を佐藤 [1] は**実解析的パラメタ** (real holomorphic parameter) **を持つ超函数**と呼んでい

---

†) 前頁脚註.

る．（勿論 microfunction の理論が現われる遥か以前のことであるから，S.S. なる記号は用いられていないが内容的には同等である．）なお，この概念は，本章第8節で述べる正則パラメタを持つ超函数とは本質的に異なる．（正則パラメタを持つ超函数の複素パラメタを実領域に制限して得られるものが実解析的パラメタを持つ超函数の全体を尽す訳ではない．前者は，後者よりずっと狭いクラスの超函数である．）その意味で，やや不適切な表現と思われるので，以下本書ではこの語を用いないこととする．ただ，著者等が，後述する**ホルムグレン** (Holmgren) **の一意性定理**（定理 3.5.1）を microfunction の観点から理解しようとした際，この言葉遣いが心理的に一つの指導原理となった（"実解析的"パラメタを持っているならば，そのパラメタについては一意接続定理が成り立ちそうではないか！）ことに触れて置くことは，microfunction の理論の形成時（1969年—1970年）の，佐藤先生の周辺の雰囲気を読者に想像して頂くのに，いささか役立つかも知れない．（佐藤先生以外は皆，その頃，謂わば，群盲象をなでていた訳である．）尚，佐藤［1］において，"実解析的パラメタを持つ超函数"の節が，何かまだ徹底していない印象を与えることも事実であった．——実際，そこは microfunction の理論が現われて，初めてその真の意味が理解される所であった．

このようにして，超函数解を対象として Cauchy 問題が定式化されたが，(実)解析函数を対象とする場合（定理 3.4.2）と異なり，一般には Cauchy 問題の（超函数）解が存在すると云う保証はない．実際，例えば $P(x, D_x)$ が楕円型であれば，$u(x)$ が，従って $D_1^j u|_{x_1=0}$ がすべて，実解析的となり（定理 3.4.4 (i)）Cauchy データとして許されるのは解析函数に限られてしまう（逆に，ここに次節で論じる双曲型方程式なる概念の現われる必然性がある）．然しながら Cauchy 問題の超函数解がもし存在すればそれは唯一つに限る．これが所謂 Holmgren の定理（後述定理 3.5.1）である．それを microfunction の立場から見直すと，まず次のような一般的な命題が得られる．

命題 3.5.2. 実解析的多様体 M 上の実数値実解析函数 $\varphi(x)$ が $x_0 \in M$ において $\varphi(x_0)=0$ かつ $d\varphi(x_0) \neq 0$ を満たすとする．M 上の超函数 $u(x)$ が $\mathrm{Supp}\, u \subset \{x \in M \mid \varphi(x) \geqq 0\}$ なる条件を満たし，しかも，$(x_0, \sqrt{-1}\, d\varphi(x_0)\infty)$ 又は $(x_0, -\sqrt{-1}\, d\varphi(x_0)\infty)$ の少くとも何れか一方は S.S. u に含まれないとする．

この時 x_0 の近傍で $u=0$ である.

［証明］ $d\varphi(x_0)\neq 0$ であるから x_0 の近傍で適当に座標変換を行うことにより, $(t,x)\in M=\boldsymbol{R}_t\times\boldsymbol{R}^n_x$, $\varphi=\varphi(t,x)=t-x_1{}^2-\cdots-x_n{}^2$ かつ $x_0=(t,x)=(0,0)$ であると仮定しても一般性を失うことはない. 即ち, $\mathrm{Supp}\,u\subset\{(t,x)\,|\,t\geqq x_1{}^2+\cdots+x_n{}^2\}$ が成り立つ. 今 $(0,0;\sqrt{-1}\,dt\infty)\notin \mathrm{S.S.}u(t,x)$ と仮定しよう. ここで $\xi\in S^{n-1}$ に対して

$$v(t,\xi,p)=\frac{(n-1)!}{(-2\pi\sqrt{-1})^n}\int\frac{u(t,x)}{(p-\langle x,\xi\rangle+\sqrt{-1}\,0)^n}dx$$

なる函数を導入しよう. ここで $t<\varepsilon$ なる時 $|x|^2>\varepsilon$ ならば $u(t,x)=0$ であるから積分は意味を持っていることに注意しよう. (もともと, この積分が定義できるように座標変換したのである*).) 次に $v(t,\xi,p)$ に $p=\langle x,\xi\rangle$ を代入して ξ に関して積分すれば,

$$\begin{aligned}
&\int_{S^{n-1}}v(t,\xi,\langle x,\xi\rangle)\omega(\xi)\\
&=\frac{(n-1)!}{(-2\pi\sqrt{-1})^n}\int_{S^{n-1}}\omega(\xi)\int\frac{u(t,x')}{(\langle x-x',\xi\rangle+\sqrt{-1}\,0)^n}dx'\\
&=\int u(t,x')dx'\left(\frac{(n-1)!}{(-2\pi\sqrt{-1})^n}\int_{S^{n-1}}\frac{\omega(\xi)}{(\langle x-x',\xi\rangle+\sqrt{-1}\,0)^n}\right)\\
&=\int u(t,x')\delta(x-x')dx'=u(t,x)
\end{aligned}$$

を得る. さて $v(t,\xi,p)$ の構造を調べる為にその特異性スペクトルを調べてみよう. $(0,0;\sqrt{-1}\,dt\infty)\notin\mathrm{S.S.}u(t,x)$ であったから十分小さい $\varepsilon>0$ と十分大きい $M>0$ に対して $|t|<\varepsilon$(従って $|x|^2<\varepsilon$), $a>M|\eta|$ ならば

$$(t,x;\sqrt{-1}(adt+\langle\eta,dx\rangle)\infty)\notin\mathrm{S.S.}u(t,x)$$

が成り立つ. 従って

$$\widehat{\mathrm{S.S.}}\,u(t,x)\cap\{|t|<\varepsilon\}\subset\{(t,x;\sqrt{-1}(adt+\langle\eta,dx\rangle))\,|\,a\leqq M|\eta|\}$$

を得る. 一方

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{S.S.}}(p-\langle x,\xi\rangle+\sqrt{-1}\,0)^{-n}\subset\{(p,x,\xi;\sqrt{-1}\,\alpha d(p-\langle x,\xi\rangle))\,|\,\alpha\geqq 0,\\ \alpha(p-\langle x,\xi\rangle)=0\}\end{aligned}$$

が成り立つから, 定理 3.1.5 により

$$\widehat{\mathrm{S.S.}}(u(t,x)(p-\langle x,\xi\rangle+\sqrt{-1}\,0)^{-n}\cap\{|t|<\varepsilon\}\subset$$

---

*) この変換を (Holmgren) 変換と謂う. Holmgren が一意性定理の証明にこの座標変換を用いたことによる.

$$\{(t, x, \xi, p, \sqrt{-1}(adt+\langle\eta-\alpha\xi, dx\rangle-\alpha\langle x, d\xi\rangle+\alpha dp) \mid a\leqq M|\eta|, \alpha\geqq 0,$$
$$\alpha(p-\langle x, \xi\rangle)=0\}$$

を得る．従って定理 3.2.1 により

$$\widehat{\mathrm{S.S}}.v(t, \xi, p)\cap\{|t|<\varepsilon\}\subset\{(t, \xi, p; \sqrt{-1}(adt+\alpha dp-\alpha\langle x, d\xi\rangle) \mid |x|^2\leqq\varepsilon,$$
$$a\leqq M\alpha|\xi|, \alpha\geqq 0, \ \alpha(p-\langle x, \xi\rangle)=0\}$$

を得る．ところが

$$adt+\alpha dp-\alpha\langle x, d\xi\rangle=\alpha(dp-\langle x, d\xi\rangle+M|\xi|dt)+(\alpha M|\xi|-a)(-dt)$$

であり，仮定より $\alpha M|\xi|-a\geqq 0$ が成り立つから $\mathrm{S.S.}v(t, \xi, p)\cap\{|t|<\varepsilon\}$ は $\{(t, \xi, p; \sqrt{-1}(dp-\langle\zeta, d\xi\rangle+M|\xi|dt)\infty) \mid |\zeta|\leqq\sqrt{\varepsilon}\}\cup\{(t, \xi, p; -\sqrt{-1}dt\infty)\}$ の凸包に含まれることになる．然るにこの凸包は固有的に凸である．従って第2章定理 2.3.5 により正則函数 $\psi(t, \xi, p)$ が存在して $v(t, \xi, p)=b(\psi(t, \xi, p))$ となる．$\psi(t, \xi, p)$ は $|t|<\varepsilon$ なるところで t に関して正則である．更に $t<0$ ならば $u(t, x)=0$ であるから $v(t, \xi, p)=0$ が成立する．然るに $0\to\tilde{\mathscr{A}}\xrightarrow{b}\tau^{-1}\mathscr{B}$ (完全) であったから，$\psi(t, \xi, p)=0$ が $t<0$ で成立する．従って解析接続の一意性により $\psi(t, \xi, p)$ は恒等的に 0 である．よって $v(t, \xi, p)=0$ となり，$u(t, x)=\int v(t, \xi, \langle x, \xi\rangle)\omega(\xi)=0$ を得る．

$(0, 0; -\sqrt{-1}dt\infty)\notin\mathrm{S.S}u(t, x)$ の場合も証明は全く同様である． (証終)

定理 3.5.1. (Holmgren) $P(x, D_x)$ を m 階の線型微分作用素であって $\sigma(P)(0, dx_1)\neq 0$ を満たすものとする．この時，原点の近傍での超函数 $u(x)$ に対して $Pu=0$ かつ $D_1^\nu u|_{x_1=0}=0$ $(0\leqq\nu\leqq m-1)$ が成り立つならば，$x=0$ の近傍で $u=0$ である．即ち，Cauchy 問題の超函数解は存在すれば一意的である．

［証明］ $\sigma(P)(0, dx_1)\neq 0$ であるから $\sigma(P)(0, \pm\sqrt{-1}dx_1)\neq 0$, 従って定理 3.4.4 により $(0, \pm\sqrt{-1}dx_1)\notin\mathrm{S.S.}u$ が成り立つ．従って $v(x)=u(x)Y(x_1)$ は well-defined である．しかも

$$P(x, D)v=(P(x, D)u)Y(x_1)+\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=1}^{j}A_j(x, D')(D_1^{j-k}u(0, x'))\delta^{(k-1)}(x_1)=0$$

が成立する (定理 3.4.3 の証明中の補題 2 の証明を参照のこと)．従って再び定理 3.4.4 により $(0, \pm\sqrt{-1}dx_1\infty)\notin\mathrm{S.S.}v$ が成立する．一方，$\mathrm{Supp}\, v\subset\{x \mid x_1\geqq 0\}$ が成り立っているから命題 3.5.2 により $x=0$ の近傍で $v(x)=u(x)Y(x_1)=0$ となる．同様にして $u(x)Y(-x_1)=0$ が成り立つから，結局

$u(x)=u(x)(Y(x_1)+Y(-x_1))=0$ を得る*). (証終)

注意：本書ではこれ以上深入りはしないが，Holmgren の定理の精密化を二つ証明を抜きにして紹介しておこう．

(1)　西瓜割りの定理(森本 [2])

超函数 $u(x)$ が $\mathrm{Supp}\,u\subset\{x\,|\,x_1\geqq 0\}$ なる条件を満たせば，$\boldsymbol{R}^{n-1}$ の閉凸錐 G が存在して $(\widehat{\mathrm{S.S.}u})\cap\{x=0\}=\{(0,\sqrt{-1}\langle\xi,dx\rangle)\,|\,\xi'=(\xi_2,\cdots,\xi_n)\in G\}$ となる**).

(2)　u を実解析的多様体 M 上の超函数とする．$G=\mathrm{Supp}\,u\subset M$，$T=\mathrm{S.S.}u\subset\sqrt{-1}S^*M$ と記号を定める．φ を実数値実解析函数とし，点 x_0 において $\varphi(x_0)=0$ かつ $d\varphi(x_0)\neq 0$ が成り立っているとしよう．この記号を用いれば命題3.5.2は "$x_0\in G\subset\{x\,|\,\varphi(x)\geqq 0\}$ ならば $(x_0,\pm\sqrt{-1}\,d\varphi(x_0)\infty)\in T$ が成り立つ" と云う命題に言い換え得る．この陳述の精密化として次の主張が知られている．(Bony [1])：

$\mathcal{J}$ により T で 0 になる $\sqrt{-1}\,T^*M-M$ 上の ξ について斉次である C^∞-函数の全体を記すこととする．次に $\tilde{\mathcal{J}}$ を $\mathcal{J}$ を含むイデアル (ideal) であって次の条件を満たす最小のものとする：

$f,g\in\tilde{\mathcal{J}}$ ならば $\{f,g\}=\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial f}{\partial\xi_i}\dfrac{\partial g}{\partial x_i}-\dfrac{\partial g}{\partial\xi_i}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)\in\tilde{\mathcal{J}}$***). 明らかに $\tilde{\mathcal{J}}$ の零点集合 $\tilde{T}$ に対して $\tilde{T}\subset T$ が成り立つ．この時 $(G,\tilde{T})$ の対に対しても命題3.5.2に相当する事実が成立する．即ち，

$x_0\in G\subset\{x\,|\,\varphi(x)\geqq 0\}$ ならば $(x_0,\pm\sqrt{-1}\,d\varphi(x_0)\infty)\in\tilde{T}$ が成立する．

さて $M=\boldsymbol{R}_t\times\boldsymbol{R}_x^n$ の上の微分作用素 $P=D_t^2-D_{x_1}^2-\cdots-D_{x_n}^2$ を考えよう．P を**ダランベルシアン**(またはダランベール作用素) (d'Alambertian) または波動作用素 (wave operator) と謂い，$Pu=0$ なる方程式を波動方程式 (wave equation) と言う．以下，波動方程式を例に Cauchy 問題の解の構造の研究として，どのようなことが問題となるかを少し論じてみよう．なお，以下 $D_{x_1}^2+$

---

*)　$\dfrac{d}{dx_1}(Y(x_1)+Y(-x_1))=\delta(x_1)-\delta(-x_1)=0$ であり，しかも $x_1\neq 0$ ならば $Y(x_1)+Y(-x_1)=1$ であるから恒等的に $Y(x_1)+Y(-x_1)=1$ が成り立つことに注意.

**)　読者自ら図を描いてこの名称の謂を考えられたい.

***)　$\{f,g\}$ を f と g の**ポアソン** (Poisson) **括弧式**と呼ぶ.

$\cdots+D^2_{x_n}$ を $\varDelta$ と略記する($\varDelta$ をラプラシアン (Laplacian) と呼ぶ.). また, 変数をはっきりさせたい時は $\varDelta_x$ という記法を用いることもある.

直接計算により明らかなように ($\lambda>1$ ならば)

$$P({x_1}^2+\cdots+{x_n}^2-t^2)^\lambda=-4\lambda\Bigl(\lambda+\frac{n-1}{2}\Bigr)({x_1}^2+\cdots+{x_n}^2-t^2)^{\lambda-1}$$

を得る. 一方, 第2章例2.4.3により $\tilde{u}_\pm=({x_1}^2+\cdots+{x_n}^2-(t\pm i0)^2)^\lambda$ は $\boldsymbol{R}^n_x\times\boldsymbol{R}_t$ 上の超函数として well-defined であり,

$$\text{S.S.}\tilde{u}_\pm\subset\{((x,t);\sqrt{-1}(\pm x_1/t,\cdots,\pm x_n/t,\mp1)\infty)\,\big|\,t\neq0,\ t^2={x_1}^2+\cdots+{x_n}^2\}$$
$$\cup\{((0,0),\sqrt{-1}(\xi_1,\cdots,\xi_n,\eta)\infty)\mid\eta^2\geqq{\xi_1}^2+\cdots+{\xi_n}^2,\ \pm\eta>0\}\quad(\text{複号同順})$$

が成立する. ここで特に $\lambda=\dfrac{1-n}{2}$ の場合を考えよう.

$u_\pm=({x_1}^2+\cdots+{x_n}^2-(t\pm i0)^2)^{\frac{1-n}{2}}$ とおけば, タランベルシアン P に対して $Pu_\pm=0$ が成り立ち, 従って定理3.4.4の(1)により $(\text{S.S.}u_\pm)\cap\{t=x=0\}\subset\{(0,0);\sqrt{-1}(\xi_1,\cdots,\xi_n,\eta)\infty\mid\eta^2={\xi_1}^2+\cdots+{\xi_n}^2,\ \pm\eta>0\}$ を得る. (実は等号が成り立つことが後程判る.) 従って $u_\pm(t,x)$ を $t=0$ に制限することができる. 同様に $(\partial/\partial t)u_\pm(t,x)$ を $t=0$ に制限することができる. $x\neq0$ ならば $u_+(0,x)-u_-(0,x)=0$ であり, 又 $(\partial/\partial t)u_\pm(t,x)|_{t=0}=\dfrac{1-n}{2}t(x^2-(t+i0)^2)^{\frac{1-n}{2}-1}|_{t=0}=0$ である. 即ち, $u_+(0,x)-u_-(0,x)$ 及び $(\partial/\partial t)u_\pm(0,x)$ 等は何れも原点 $x=0$ にのみ台を持つ $\boldsymbol{R}^n$ 上の超函数である. このような原点にのみ台を持つ $\boldsymbol{R}^n$ 上の超函数の構造については次のように詳しいことが判っている. 即ち:

命題 3.5.3. $u(x)$ を $H^0_{\{0\}}(\boldsymbol{R}^n,\mathcal{B}_{\boldsymbol{R}^n})$ の元とすれば $u(x)$ は $\sum_{\alpha\in(\boldsymbol{Z}^+\cup\{0\})^n}a_\alpha\delta^{(\alpha)}(x)$ と云う形に表わせる. 但し $\boldsymbol{Z}^+=\{1,2,\cdots\}$ であり $\delta^{(\alpha)}(x)=$ $=\Bigl(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\Bigr)^{\alpha_1}\cdots\Bigl(\dfrac{\partial}{\partial x_n}\Bigr)^{\alpha_n}\delta(x)$ とする. 又, $a_\alpha\in\boldsymbol{C}$ は次の評価式を満足する.

任意の $\varepsilon>0$ に対して或る C_ε が存在して任意の α に対して

$$|a_\alpha|\leqq C_\varepsilon\frac{\varepsilon^{|\alpha|}}{|\alpha|!}$$

が成立する. 又, $u(x)$ から a_α は $a_\alpha=\dfrac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\displaystyle\int x^\alpha u(x)dx$ により定められる.

［証明］ $v(\xi,p)=\dfrac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\displaystyle\int\frac{u(x)}{(p-\langle x,\xi\rangle+\sqrt{-1}\,0)^n}dx$ とおけば, 命題3.5.2の証明と同様にして $u(x)=\displaystyle\int_{S^{n-1}}v(\xi,\langle x,\xi\rangle)\omega(\xi)$ を得る. さて, ここで $\nu(\zeta,\tau)=\dfrac{(n-1)!}{(-2\pi\sqrt{-1})^n}\displaystyle\int\frac{u(x)}{(\tau-\langle x,\zeta\rangle)^n}dx$ $(\zeta\in\boldsymbol{C}^n,\tau\in\boldsymbol{C})$ と定めると, ν は $\tau\neq0$ で定

義された正則函数である ($x \neq 0$ ならば $u(x)=0$ であることに注意せよ). 定義により $v(\xi, p)=\nu(\xi, p+\sqrt{-1}\,0)$ が成り立つ. 一方, $\nu(\zeta, \tau)$ は (ζ, τ) について $(-n)$ 次斉次だから $v(\zeta, \pi)=\sum_{\alpha\in(\mathbf{Z}^+\cup\{0\})^n} a_\alpha \zeta^\alpha \tau^{-n-|\alpha|}$ と表わせる. 特に $\tau=1$ とおけば $\sum_{\alpha\in(\mathbf{Z}^+\cup\{0\})^n} a_\alpha \zeta^\alpha$ は整函数であるから巾級数に関するコーシー・アダマール (Cauchy-Hadamard) の定理により, 任意の $\varepsilon>0$ に対しある定数 C_ε が存在し任意の $\alpha\in(\mathbf{Z}^+\cup\{0\})^n$ に対して $|a_\alpha| \leqq C_\varepsilon \varepsilon^{|\alpha|}$ が成り立つ. さて $v(\xi, p)=$ $=\sum_\alpha a_\alpha \xi^\alpha (p+\sqrt{-1}\,0)^{-n-|\alpha|}$ であるから

$$u(x)=\int_{S^{n-1}} \sum_\alpha a_\alpha \xi^\alpha (\langle x, \xi\rangle+\sqrt{-1}\,0)^{-n-|\alpha|}\omega(\xi)$$

となる. 他方, $D_1(\langle x, \xi\rangle)^{-n}=-n\xi_1(\langle x, \xi\rangle)^{-n-1}$ であるから, 一般に $D_x{}^\alpha(\langle x, \xi\rangle)^{-n}=(-n)(-n-1)\cdots(-n-|\alpha|+1)\xi^\alpha(\langle x, \xi\rangle)^{-n-|\alpha|}$ を得る. 従って

$$u(x)=\int \sum_\alpha \frac{a_\alpha}{(-n)(-n-1)\cdots(-n-|\alpha|+1)} D_x{}^\alpha(\langle x, \xi\rangle+\sqrt{-1}\,0)^{-n}\omega(\xi)$$

$$=\sum_\alpha C_\alpha D_x{}^\alpha \frac{(n-1)!}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\int \frac{\omega(\xi)}{(\langle x, \xi\rangle+\sqrt{-1}\,0)^n}$$

$$\left(\text{但し } C_\alpha=\frac{a_\alpha}{(-n)(-n-1)\cdots(-n-|\alpha|+1)}\times\frac{(-2\pi\sqrt{-1})^n}{(n-1)!}\right)$$

が成り立つ. $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n=\pm 1$ として命題 3.2.3 の証明に用いた Feynman の補題を用いれば,

$$\frac{1}{(-2\pi\sqrt{-1})^n}\int_{\varepsilon_j\xi_j\geqq 0} \frac{\omega(\xi)}{\langle x, \xi\rangle^n}=\frac{\operatorname{sgn}(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)}{(-2\pi\sqrt{-1})^n}\cdot\frac{1}{x_1\cdots x_n}$$

が成り立つから, $f(z)=\dfrac{1}{(-2\pi\sqrt{-1})^n}\sum_\alpha c_\alpha D_z^\alpha \dfrac{1}{z_1\cdots z_n}$ とおけば,

$$u(x)=\sum_{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n=\pm 1} \operatorname{sgn}(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n) f(x_1+\sqrt{-1}\,\varepsilon_1 0, \cdots, x_n+\sqrt{-1}\,\varepsilon_n 0)=\sum_\alpha c_\alpha \delta^{(\alpha)}(x)$$

を得る. ($\delta(x)=\dfrac{1}{(-2\pi\sqrt{-1})^n}\displaystyle\sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n=\pm 1}\dfrac{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}{(x_1+\sqrt{-1}\varepsilon_1 0)\cdots(x_n+\sqrt{-1}\varepsilon_n 0)}$ であることを思い出されたい.)

逆に $u(x)$ が $\sum_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n=\pm 1} \operatorname{sgn}(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n) f(x_1+\sqrt{-1}\,\varepsilon_1 0, \cdots, x_n+\sqrt{-1}\,\varepsilon_n 0)$ の形をしていれば, $f(x_1+\sqrt{-1}\,0, x_2+\sqrt{-1}\,\varepsilon_2 0, \cdots, x_n+\sqrt{-1}\,\varepsilon_n 0)=$ $=f(x_1-\sqrt{-1}\,0, x_2+\sqrt{-1}\,\varepsilon_2 0, \cdots, x_n+\sqrt{-1}\,\varepsilon_n 0)$ が $x_1\neq 0$ で成り立つことより $u(x)=0$ $(x_1\neq 0)$, これを $x_2, \cdots, x_n$ について繰り返せば, 結局 $x\neq 0$ ならば $u(x)=0$ を得るから, $u(x)$ が原点にのみ台を持つことが判る.

最後に原点にのみ台を持つ $u(x)$ が与えられたとして C_α を求める公式を導いておこう.

各 $j(1\leqq j\leqq n)$ について γ_j を z_j-平面内でその原点の周りを反時計回りにまわる道とすれば原点にのみ台を持つ超函数 $u(x)$ に対し

$$\int x^\alpha u(x)dx=(-1)^n\oint_{\gamma_1}\cdots\oint_{\gamma_n}z^\alpha f(z)dz$$

を得ることは容易に判る．定義により

$$f(z)=\frac{1}{(-2\pi\sqrt{-1})^n}\sum_\alpha(-1)^{|\alpha|}\alpha!C_\alpha\,\frac{1}{z_1{}^{1+\alpha_1}\cdots z_n{}^{1+\alpha_n}}$$

であるから $z^\alpha f(z)$ において $\dfrac{1}{z_1\cdots z_n}$ の係数は

$\dfrac{1}{(-2\pi i)^n}(-1)^{|\alpha|}\alpha!C_\alpha$ である．一方，

$$\oint_{\gamma_i}\frac{dz_i}{z_i{}^n}=\begin{cases}2\pi i & (n=1)\\ 0 & (n\neq 1)\end{cases}$$

である．従って，これより $\int x^\alpha u(x)dx=(-1)^{|\alpha|}\alpha|C_\alpha$ を得る．即ち．

$C_\alpha=\dfrac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\int x^\alpha u(x)dx$ を得る．　　　　(証終)

系． $u(x)$ が原点にのみ台を持つ $\boldsymbol{R}^n$ 上の超函数であり，かつ λ 次斉次 (homogeneous) (即ち，$(\sum_{i=1}^n x_iD_i-\lambda)\,u=0$ なるオイラー (Euler) の関係式を満たす) であるとする．この時，次の二つの事実が成立する．

(1)　$\lambda\neq-n,\ -n-1,\ -n-2,\cdots$ ならば $u(x)=0$.

(2)　$\lambda=-n-m\ (m\geqq 0)$ ならば $u(x)=\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha\delta^{(\alpha)}(x)$.

［証明］ 命題 3.5.3 により $u(x)=\sum_\alpha a_\alpha\delta^{(\alpha)}(x)$ と表わせる．ここで $(\sum_{i=1}^n x_iD_i)\delta^{(\alpha)}(x)=-(n+|\alpha|)\delta^{(\alpha)}(x)$ であるから，

$$0=(\sum_{i=1}^n x_iD_i-\lambda)u=\sum_\alpha a_\alpha(\sum_{i=1}^n x_iD_i-\lambda)\delta^{(\alpha)}(x)=-\sum_\alpha(n+|\alpha|-\lambda)a_\alpha\delta^{(\alpha)}(x)$$

が成り立たねばならない．従って任意の α に対して $(n+|\alpha|-\lambda)a_\alpha=0$, 即ち，$\lambda\neq n+|\alpha|$ ならば $a_\alpha=0$ が得られる．従って求める結果が直ちに得られる．

(証終)

さて波動方程式の話に戻ろう．まず $u_+(0,x)-u_-(0,x)$ について考えよう．$u_\pm(t,x)=(x_1{}^2+\cdots+x_n{}^2-(t\pm\sqrt{-1}\,0)^2)^{\frac{1-n}{2}}$ であったから $(\sum_{i=1}^n x_iD_i+n-1)\,u_\pm(0,x)=0$ が成り立つ．即ち $u_+(0,x)-u_-(0,x)$ は原点にのみ台を持つ $(-n+1)$ 次斉次な超函数である．従って上述命題 3.5.3 の系により $u_+(0,x)=u_-(0,x)$ を得る．

次に $((\partial/\partial t)u_\pm(0,x)$ の構造を調べよう．

$$0=D_t(tD_t+\sum_{i=1}^{n}x_iD_i+(n-1))u_\pm(t,\ x)=(tD_t+\sum_{i=1}^{n}x_iD_i+n)D_tu_\pm(t,\ x)$$

が成り立つ．従って $t=0$ に制限すれば $(\sum_{i=1}^{n}x_iD_i+n)D_tu_\pm(0,x)=0$ を得る．よって $D_tu_\pm(0,x)$ は原点にのみ台を持つ $(-n)$ 次斉次超函数であるから再び命題3.5.3の系により定数 $C_\pm$ が存在して $D_tu_\pm(0,x)=C_\pm\delta(x)$ と表わせる．次に $C_\pm$ を計算しよう．

$C_\pm=\int C_\pm\delta(x)dx=\int D_tu_\pm(0,x)dx$ であり，$D_tu_\pm(0,x)$ はその台が原点に限られているから $C_\pm=\int_{|x|\leqq a}D_tu_\pm(0,x)dx$ $(a>0)$ が成り立つ，他方，

$$\text{S.S.}(D_tu_\pm(t,x))\subset\{((t,x),\sqrt{-1}(\tau dt+\langle\xi,dx\rangle)\infty)\,|\,\tau^2=|\xi|^2\}$$

であったから積 $D_tu_\pm(t,x)Y(a-|x|)$ が定義できる．従って積分

$$\phi_\pm(t)=\int_{|x|\leqq a}D_tu_\pm(t,x)dx=\int D_tu_\pm(t,x)\cdot Y(a-|x|)dx=D_t\int u_\pm(t,x)Y(a-|x|)dx$$

も well-defined である（被積分函数は x 変数についてコンパクトな台を持つことに注意）．

$\phi_\pm$ を計算する補助手段として，先ず $\int_{|x|\leqq a}(x^2-(t+i0)^2)^\lambda dx$ を計算しよう．命題3.2.4によりこの積分は積分 $\int_{|x|\leqq a}(x^2-\tau^2)^\lambda dx$ の $\mathrm{Im}\tau>0$ からの境界値 $b\,(\int_{|x|\leqq a}(x^2-\tau^2)^\lambda dx)$ に等しい．さて，$x=s\xi$，$|\xi|=1$ と変数変換を行えば

$$\int_{|x|\leqq a}(x^2-\tau^2)^\lambda dx=c\int_0^a(s^2-\tau^2)^\lambda s^{n-1}ds,$$

但し

$$c=(n\text{ 次元球面の面積})=2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$$

を得る．従って

$$\phi(t)=c\frac{d}{dt}\int_0^a(s^2-(t+i0)^2)^\lambda s^{n-1}ds=-2\lambda ct\int_0^a(s^2-(t+i0)^2)^{\lambda-1}s^{n-1}ds$$

が成立する．ここで $t=\sqrt{-1}t'$ $(t'>0)$ とすれば

$$\phi(\sqrt{-1}t')=-2\lambda c\sqrt{-1}t'\int_0^a(s^2+t'^2)^{\lambda-1}s^{n-1}ds=$$
$$=-2\lambda c\sqrt{-1}t'\int_0^{\frac{a}{t'}}t'^{2\lambda+n-2}(s^2+1)^{\lambda-1}s^{n-1}ds$$

となるから．特に $\lambda=\dfrac{1-n}{2}$ とおけば

$$\phi(\sqrt{-1}t')=(n-1)c\sqrt{-1}\int_0^{\frac{a}{t'}}(s^2+1)^{-\frac{n+1}{2}}s^{n-1}ds$$

を得る．従って

$$C_+=\lim_{t'\to 0}\phi(\sqrt{-1}t')=(n-1)c\sqrt{-1}\int_0^\infty (s^2+1)^{-\frac{n+1}{2}}s^{n-1}ds$$

$$=(n-1)c\sqrt{-1}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right)}=\frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sqrt{-1}$$

を得る．C_-も同様にして計算できるから，結局

$$D_t u_\pm(0,x)=\pm\frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\delta(x)$$

が成立する．なお，この事実から

$(\mathrm{S.S.}\,u_\pm)\cap\{t=x=0\}=\{(0,0;\sqrt{-1}(\xi_1,\cdots,\xi_n,\eta)\infty)\mid \eta^2=|\xi|^2,\ \pm\eta>0\}$ (複号同順)

を得ることができることも，以下で必要とはしないけれど，注意しておこう．

さて以上をまとめると，ダランベルシアン $P=D_t{}^2-\Delta$ に対して

$$u_\pm=(x_1{}^2+\cdots+x_n{}^2-(t\pm\sqrt{-1}0)^2)^{\frac{1-n}{2}}$$

と定めれば，$Pu_\pm=0$ が成り立ち，しかも

$$u_+(0,x)=u_-(0,x),\quad D_t u_\pm(0,x)=\pm\frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\delta(x)$$

となることが判る．従ってここで

$$K_1(t,x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{4\sqrt{-1}\pi^{\frac{n+1}{2}}}\{(x_1{}^2+\cdots+x_n{}^2-(t+\sqrt{-1}0)^2)^{\frac{1-n}{2}}$$
$$-(x_1{}^2+\cdots+x_n{}^2-(t-\sqrt{-1}0)^2)^{\frac{1-n}{2}}\}$$

と定めれば

$$\begin{cases}(D_t{}^2-\Delta)K_1(t,x)=0\\ K_1(0,x)=0\\ \dfrac{\partial K_1}{\partial t}(0,x)=\delta(x)\end{cases}$$

を得る．また，例 2.4.3 の計算と同様にして Supp $K_1\subset\{(t,x);\ |x|^2\leqq t^2\}$ を得る．

この超函数 $K_1(t,x)$ を用いて次の定理を得る．

定理 3.5.2.　$K_0(t,x)=D_tK_1(t,x)$ と定める．

(1)　$\boldsymbol{R}^{n+1}$ で $(D_t{}^2-\Delta)u(t,x)=0$ が成り立つならば

$$u(t,x)=\int K_0(t,x-x')u(0,x')dx'+\int K_1(t,x-x')\frac{\partial u}{\partial t}(0,x')dx'$$

が成り立つ.

(2)　逆に $\boldsymbol{R}^n$ 上の任意の超函数 $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ に対して

$$u(t,x)=\int K_0(t,x-x')\varphi_0(x')dx'+\int K_1(t,x-x')\varphi_1(x')dx'$$

と置けば $u(t,x)$ は

$$\begin{cases}(D_t^2-\Delta)u(t,x)=0\\ u(0,x)=\varphi_0(x)\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x)=\varphi_1(x)\end{cases}$$

を満足する.

即ち，波動方程式に対して Cauchy 問題は(一意的に)解ける.

［証明］　最初に(2)を証明しよう．既に述べたように

$$\begin{cases}(D_t^2-\Delta)K_1=0\\ K_1(0,x)=0\\ \dfrac{\partial K_1}{\partial t}(0,x)=\delta(x)\end{cases}$$

が成り立つから，$(D_t^2-\Delta)K_0=D_t(D_t^2-\Delta)K_1=0$ および $K_0(0,x)=\delta(x)$ を得る．実は更に $\dfrac{\partial K_0}{\partial t}(0,x)=0$ も成立する．実際 $D_tK_0=D_t^2K_1=\Delta K_1$ 故，$D_tK_0|_{t=0}=\Delta K_1|_{t=0}=\Delta(K_1|_{t=0})=0$ が成り立つからである．K_1，従って K_0 も，その台が $\{|x|^2\leqq t^2\}$ に限られていることを用いれば，$u(t,x)$ を定める積分が well-defined であること，更に

$$(D_t^2-\Delta)u(t,x)=\int[(D_t^2-\Delta_x)K_0](t,x-x')\varphi_0(x')dx'+$$

$$+\int[(D_t^2-\Delta_x)K_1]\ (t,x-x')\varphi_1(x')dx'=0,$$

$$u(0,x)=\int K_0(0,x-x')\varphi_0(x')dx'+\int K_1(0,x-x')\varphi_1(x')dx'$$

$$=\int\delta(x-x')\varphi_0(x')dx'=\varphi_0(x)$$

および

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x')=\int\frac{\partial K_0}{\partial t}(0,x-x')\varphi_0(x')dx'+\frac{\partial K_1}{\partial t}(0,x-x')\varphi_1(x')dx'$$

$$=\int\delta(x-x')\varphi_1(x')dx'=\varphi_1(x)$$

を得る．これで(2)が証明された．

次に(1)を証明しよう．

$$\int_0^t \left(\int D_{t'}(D_t K_1(t-t', x-x')u(t', x'))dx'\right)dt'$$

$$=\int D_t K_1(0, x-x')u(t, x')dx' - \int D_t K_1(t, x-x')u(0, x')dx' =$$

$$=u(t, x) - \int D_t K_1(t, x-x')u(0, x')dx' = u(t, x) - \int K_0(t, x-x')u(0, x')dx'$$

であり，又

$$\int_0^t \left(\int D_{t'}[K_1(t-t', x-x')D_{t'}u(t', x')]dx'\right)dt'$$

$$=\int K_1(0, x-x')D_t u(t, x')dx' - \int K_1(t, x-x')(D_t u)(0, x')dx'$$

$$=-\int K_1(t, x-x')D_t u(0, x')dx'$$

であるから，結局

$$u(t, x) - \int K_0(t, x-x')u(0, x')dx' - \int K_1(t, x-x')(D_t u)(0, x')dx'$$

$$=\int_0^t \left(\int D_{t'}[K_1(t-t', x-x')D_{t'}u(t', x') + D_t K_1(t-t', x-x')u(t', x')]dx'\right)dt'$$

$$=\int_0^t \left(\int [K_1(t-t', x-x')D_{t'}{}^2 u(t', x') - (D_t{}^2 K_1(t-t', x-x')u(t', x'))]dx'\right)dt'$$

$$=\int_0^t \left(\int [K_1(t-t', x-x')\Delta_{x'} u(t', x') - (\Delta_{x'} K_1)(t-t', x-x')u(t', x')]dx'\right)dt'$$

ここで $\boldsymbol{R}^n_{x'}$ 内の滑らかな境界 $\partial\Omega_{t'}$ を持つ領域 $\Omega_{t'}$ を

$$\{x' \in \boldsymbol{R}^n \mid (t-t')^2 \leqq |x-x'|^2\} \subset \Omega_{t'}$$

と選べば，ストークス (Stokes) の定理により，K_1 の台に関する条件を用いて，上の積分は

$$\int_0^\infty \left[K_1(t-t', x-x')\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}u(t', x') - \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}K\right)(t-t', x-x')u(t', x')\Big|_{\partial\Omega_{t'}}\right]dt' =0$$

となる．

従って(1)が証明された． (証終)

注意． 定理 3.5.2 で用いた超函数の組 $(K_0(t, x),\ K_1(t, x))$ を波動方程式に対する**コーシー** (Cauchy) **問題の素解**(**基本解**)と呼ぶことがある．

問． 定理 3.5.2 では $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 全体で問題を考えた．$\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ が $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ で与えられている時，

$$u(t, x) = \int K_0(t, x-x')\varphi_0(x')dx' + \int K_1(t, x-x')\varphi_1(x')dx'$$

により定められた超函数 $u(t, x)$ はどのような領域で well-defined であるかを考えよ．一般に，(t, x) での解の挙動を完全に決定してしまう $\{(t, x)|t=0\}$ 内の領域を u の $((t, x)$ に於ける)**依存領域**と謂い，逆に，$\varphi_0(x)$ 又は $\varphi_1(x)$ を $\{(t, x)|t=0\}$ の点 x_0 の近傍で変化させた時，解 $u(t, x)$ が影響を受ける領域を**影響領域**と謂う．

さて，定理 3.5.2 で用いた K_0, K_1 の台は n が 1 より真に大きい奇数である時，$\{(t, x)|t^2=|x|^2\}$ に含まれ，それ以外の時は，$\{(t, x|t^2\leqq|x|^2\}$ を埋め尽くすことを直接に計算によって確かめることができる(この事実を，$n\geqq3$ なる奇数に対してはホイヘンス (Huyghens) の原理が成立する，或いは波の拡散が起こらない，等と表現することもある)．このように，K_0, K_1 の台が次元数 n によって著しく異なることは，多くの解析学者の興味を惹き，Petrowsky [1] による lacuna (くぼみ，穴)の理論として結実した．然しながら，Atiyah-Bott-Gårding [1]，[2] の示すように，台の性質の研究は線型偏微分方程式の理論構成全体から考えると，余りに特殊な話題と思われる(実際 “Huyghens の原理” の成り立つのは，極めて例外的な場合である)．ところが，ここで驚くべきことには，microfunction の理論を用いると，microfunction に対する Huyghens の原理(これを広義の Huyghens の原理と呼ぶこともある)は極めて一般に成り立つ．これについては次節で詳述するが，ここでは，波動方程式に対して，microfunction 解の伝播の様子を調べてみよう，その為に，偏微分方程式論で古典的な，陪特性帯 (bicharacteristic strip) の定義を思い出しておこう．

定義 3.5.1. 線型微分作用素 $P(x, D_x)$ の主要表象 $\sigma(P)$ を $p_m(x, \xi)$ とする時，

$$\frac{dx_1}{\dfrac{\partial p_m}{\partial \xi_1}}=\cdots\cdots=\frac{dx_n}{\dfrac{\partial p_m}{\partial \xi_n}}=\frac{d\xi_1}{-\dfrac{\partial p_m}{\partial x_1}}=\cdots\cdots=\frac{d\xi_1}{-\dfrac{\partial p_m}{\partial x_n}}$$

の積分曲線 $(x(t), \xi(t))$ であって $p_m(x(t), \xi(t))=0$ を満たすものを，方程式 $P(x, D_x)u(x)=0$ の**陪特性帯**と呼ぶ．陪特性帯を底空間に射影して得られる $\{x(t)\}$ を**陪特性曲線** (bicharacteristic curve) と呼ぶ．

陪特性帯の言葉を用いて，波動方程式 $(D_t^2-\varDelta_x)u(t, x)=0$ の microfunction 解の構造を述べると次のようになる．

定理 3.5.3. Ω を $\sqrt{-1}S^*\boldsymbol{R}^{n+1}$ での開集合とする．波動方程式の Ω での microfunction 解 u と P の任意の陪特性帯 b に対し，$\mathrm{Supp}u\cap b$ は $b\cap\Omega$ で開かつ閉である．即ち $\mathrm{Supp}\,u\cap b$ は $b\cap\Omega$ の連結集合の和集合である．

注意． この定理により，波動方程式の microfunction 解は陪特性帯に沿ってのみ伝播することが判る．一方，明らかに，波動方程式の特性多様体 $\{(t, x; \sqrt{-1}(\tau, \xi)\infty)\in\sqrt{-1}S^*\boldsymbol{R}^{n+1}|\tau^2=\xi^2\}$ は陪特性帯の n-parameter family (即ち，n 個のパラメタを持った陪特性帯の族)によって覆いつくされるから，前節で触れた microfunction 解の構造を明らかにする，という問題は，波動方程式に対しては解決されたことになる．

［定理 3.5.3 の証明］ $\begin{cases}\{(D_t^2-\Delta_x)K(t, x)=0\\ K(0, x)=0\\ \dfrac{\partial K}{\partial t}(0, x)=\delta(x)\end{cases}$

の解 $K(t, x)$ に対して $E(t, x)=K(t, x)Y(t)$ と定めよう ($Y(t)$ はヘビサイド函数)．この時，まず次の補題を証明しよう．

補題． (i) $(D_t^2-\Delta_x)E(t, x)=\delta(t, x)$

(ii) $\mathrm{Supp}E\subset\{(t, x)\in\boldsymbol{R}^{n+1}|\ |x|\leqq t\}$

(iii) $\mathrm{S.S.}E\subset\{0, 0; \sqrt{-1}(\tau, \xi)\infty)\in\sqrt{-1}S^*\boldsymbol{R}^{n+1}|(\tau, \xi)\neq 0\}\cup$

$\cup\left\{(t, x; \sqrt{-1}(\tau, \xi)\infty)\in\sqrt{-1}S^*\boldsymbol{R}^{n+1}|\tau^2=\xi^2\neq 0,\ t\geqq 0,\ x=-\dfrac{\xi}{\tau}t\right\}$

［証明］ まず(i)を示そう．

$D_tE(t, x)=(D_tK(t, x))Y(t)+K(t, x)\delta(t)=(D_tK)Y(t)+K(0, x)\delta(t)=(D_tK)Y(t)$

であるから

$$D_t^2E(t, x)=(D_t^2K)Y(t)+D_tK(0, x)\delta(t)=(D_t^2K)Y(t)+\delta(t, x)$$

が成り立つ．一方，$\Delta_xE(t, x)=(\Delta_xK)Y(t)$ であるから，結局

$$(D_t^2-\Delta)E(t, x)=((D_t^2-\Delta)K)Y(t)+\delta(t, x)=\delta(t, x)$$

を得る．

(ii) は $\mathrm{Supp}\,K\subset\{(t, x)\in\boldsymbol{R}^{n+1}|\,|x|^2\leqq t^2\}$ かつ $\mathrm{Supp}\,Y(t)\subset\{(t, x)\in\boldsymbol{R}^{n+1}|\,t\geqq 0\}$ であるから明らか．

(iii)を示そう．(ii)より $\mathrm{S.S.}E\cap\{t\leqq 0\}\subset\{t=x=0\}$ である．一方，$t>0$ では $Y(t)=1$ であるから

$$E(t,x)=K(t,x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{4\sqrt{-1}\pi^{\frac{n+1}{2}}}\{(x_1{}^2+\cdots+x_n{}^2-(t+\sqrt{-1}0)^2)^{\frac{1-n}{2}}$$
$$-(x_1{}^2+\cdots+x_n{}^2-(t-\sqrt{-1}0)^2)^{\frac{1-n}{2}}\}$$

となる．第2章例2.4.3により $\mathrm{Im}\, t>0$ かつ $\mathrm{Im}(x_1{}^2+\cdots+x_n{}^2-t^2)<0$ からの境界値と考えて $(x_1{}^2+\cdots+x_n{}^2-(t\pm\sqrt{-1}0)^2)^\lambda=(x_1{}^2+\cdots+x_n{}^2-t^2\pm\sqrt{-1}0)^\lambda$ となるから，この特異性スペクトルは $\{(x,t;(\xi,\tau)\infty)\,|\,x_1{}^2+\cdots+x_n{}^2-t^2=0,\ (\xi,\tau)=(2x,2t)\}$ に含まれる．即ち，ある正数 $c>0$ が存在して $\xi=cx$，$\tau=-ct$ となる．特に $x=-\dfrac{\xi}{\tau}t$ を得る．一方 $(D_t{}^2-\Delta_x)E=0$ $(t>0)$ であるから定理3.4.4により $\tau^2=\xi^2\neq0$ となる．以上により求める結果が得られる．

（補題の証終）

この補題を用いて定理3.5.3を証明しよう．定理の証明には次のことを示せば十分である：

$u(t,x)$ を $(0,0;\sqrt{-1}(\tau_0,\xi_0)\infty)$ (但し $\tau_0{}^2=\xi_0{}^2$) の近傍で定義された microfunction であって $(D_t{}^2-\Delta)u(t,x)=0$ を満たすものとする．その時，$u(t,x)$ が $(0,0;\sqrt{-1}(\tau_0,\xi_0)\infty)$ で 0 ならば $u(t,x)$ は$\left(t,\ -\dfrac{t}{\tau_0}\xi_0,\sqrt{-1}(\tau_0,\ \xi_0)\infty\right)$で 0 になる．

それには $\tilde{u}\underset{\text{def}}{=}u(t,x)Y(t)$ により microfunction $\tilde{u}$ を定義した時 $\tilde{u}=0$ になることを言えばよい．ここで $(D_t{}^2-\Delta_x)\tilde{u}(t,x)=0$ が $\{(t,x;\sqrt{-1}(\tau,\xi)\infty)\,|\,\tau=\tau_0,\xi=\xi_0\}$ の近傍で成り立つことは明らかである．

補題の(1)により

$$\tilde{u}(t,x)=\int\delta(t-t',x-x')\tilde{u}(t',x')dt'dx'$$
$$=\int[(D_{t'}{}^2-\Delta_{x'})E(t-t',x-x')]\tilde{u}(t',x')dt'dx'$$

を得る．ここで補題の(2), (3)を考慮して部分積分を行えば

$$\tilde{u}(t,x)=\int E(t-t',x-x')(D_{t'}{}^2-\Delta_{x'})\tilde{u}(t',x'))dt'dx'=0$$

が $\{(t,x;\sqrt{-1}(\tau,\xi)\infty)\in\sqrt{-1}S^*\boldsymbol{R}^{n+1}\,|\,\tau=\tau_0,\ \xi=\xi_0\}$ の近傍で成り立つことは容易に確かめ得る．詳しくは読者への演習問題とする．（証終）

§6. 正規双曲型作用素 (regularly hyperbolic operator) の基本解

§4で我々は，$\sigma(P)(x,\sqrt{-1}\xi)\neq0$と云う条件の下に，線型微分作用素$P(x,D_x)$

の逆作用素を $\mathscr{L}_M$ 内に構成した．又，前節では Holmgren の定理に関連して初期値問題の可解性を論じ，初期値問題の基本解の構成が具体的に行い得る作用素の一例として波動作用素を調べた．では，波動作用素は，楕円型でない作用素の中でどのような位置を占めるのか．この問題を考える為に本節では，正規双曲型作用素と呼ばれる微分作用素に対して，波動作用素に対すると同様の事実を示し得ることを述べる．本節の考察は，第4章第3節への伏線ともなっている．

まず(正規)双曲型作用素の定義から始める．

定義 3.6.1. 原点 $0\in \boldsymbol{R}^n$ のある近傍で

$$\sigma(P)(x, \sqrt{-1}\xi)=a(x)\prod_{l=1}^{m}(\xi_1-\lambda_l(x, \xi')),$$

但し $a(0)\neq 0$, $\lambda_l(x, \xi')$ は，(x, ξ') が実の時，実，と書ける時，線型微分作用素 $P(x, D_x)$ は原点で $(1, 0, \cdots, 0)$ 方向に関して**双曲型**であると謂われる．更に $\lambda_l(x, \xi')\neq\lambda_k(x, \xi')$ $(l\neq k, \xi'\neq 0)$ が成り立つ時，P を**正規双曲型作用素**と呼ぶ．

注意. 双曲型作用素という概念は，distribution 解を対象にする際は，もう少し狭い意味で用いるのが通例であるが，超函数解を対象とする場合にはこの定義が最も自然である．それは，そもそも，双曲型作用素という概念は，初期値問題の基本解が存在するような作用素として把握された (Gårding [1]) こと，そして超函数解の範囲で考えれば，上の意味での双曲型作用素には常に初期値問題の基本解が存在すること (Bony-Schapira [1]) の二つの事実による．但し，この問題はやや技術的なことになるので，本書ではこれ以上は立ち入らない．又，microfunction の立場からは，双曲型という概念を超局所化した"超局所双曲型作用素" (micro-hyperbolic operator) の概念(柏原-河合[3])が理論的により重要であるが，これについては，本書の程度を越えるので，ここでは論じない．

さて，正規双曲型作用素に対して局所的に初期値問題の基本解を構成し，その特異性を調べてみよう．この目的には，浜田 [1] による次の極めて基本的な定理が，最も有効に用いられる．以下議論の大筋は河合 [2] に従う．

定理 3.6.1. (浜田)　$P(z, D_z)=P(z_1, \cdots, z_n, \partial/\partial z_1, \cdots, \partial/\partial z_n)$ を $z=0\in\boldsymbol{C}^n$ の近傍で定義された，正則函数を係数とする線型微分作用素とする．今，$\sigma_m(P)(z, \zeta_1, \zeta')=0$ $(\zeta'=(\zeta_2, \cdots, \zeta_n))$ を ζ_1 についての方程式と見る時，$(z_1, z'; \zeta')=(0, z'_0; \zeta'_0)$ $(z'=(z_2, \cdots, z_n))$ の近傍で，すべての根 $\lambda_1(z, \zeta'), \cdots, \lambda_m(z, \zeta')$ が互

いに相異なると仮定する．この時次の初期値問題 (3.6.2) は (3.6.3) の形の解 $u(z,w',\zeta')$ を持つ．但し，そこで $\varphi_k(z,w',\zeta')$ は

$$(3.6.1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi_k}{\partial z_1}-\lambda_k(z,\mathrm{grad}_{z'}\varphi_k)=0 \\ \varphi_k(z,w',\zeta')|_{z_1=0}=\langle z'-w',\zeta'\rangle \end{cases}$$

なる初期値問題の解である．

$$(3.6.2)\quad \begin{cases} P(z,D_z)u(z,w',\zeta')=0 \\ \dfrac{\partial^j}{\partial z_1{}^j}u(z,w',\zeta')|_{z_1=0}=\dfrac{c_j}{\langle z'-w',\zeta'\rangle^{l_j}} \qquad (j=0,\cdots,m-1) \end{cases}$$

(c_j は定数，l_j は正整数)

$$(3.6.3)\quad u=\sum_{k=1}^m u_k,\ \text{但し}\ u_k(z,w',\zeta')=\sum_{j\geq j_k}a_{jk}(z,w',\zeta')\ \varphi_k(z,w',\zeta')^j+ \\ +b_k(z,w',\zeta')\ \log\ \varphi_k(z,w',\zeta')\ (a_{jk},b_k\ \text{は}\ (0,z_0',\zeta_0')\ \text{の近傍で正則})$$

注意 1. ここで，(3.6.2)の意味は，$\log\varphi_k$ の多価性の為に，やや不明確である．厳密には“被覆空間の上で”と言うべきであるが，以下では，$\log\varphi_k$ の分枝を一つ定めて議論を進めるので，別に問題はない．

注意 2. 証明の方法より，$P(z,D_z)u_k=0$ と u_k を選べることも判っている．

注意 3. (3.6.1)の解 φ_k の存在を保証するのが，古典的な Hamilton-Jacobi の理論である．詳しくは，例えば吉田 [1] 第Ⅱ編第4章を見られたい．なお，そこに与えられた解法より，$\zeta_1-\lambda_k(z,\zeta')$ の陪特性帯 $(z(s),\zeta(s))_{|s|\ll 1}$ 上において $\mathrm{grad}_z\varphi_k(z,w',\zeta')|_{z=z(s)}=\zeta(s)$ が成り立つことにも注意しておく．また，ここで $\lambda_k(x,\xi')$ が (x,ξ') が実の時，実，と云う仮定の下で (3.6.1) は実数値実解析函数の範囲で解を持つことも，Hamilton-Jacobi の議論より容易に判る．更に，λ_k が ζ' について一次斉次(即ち，$\sum_{j=2}^n\zeta_j(\partial/\partial\zeta_j)\lambda_k(z,\zeta')=\lambda_k(z,\zeta')$ であるから，φ_k も又，ζ' について一次斉次であることは，初期値問題(3.6.1)の解の一意性から直ちに従う．(何故ならば，$\varphi_k(z,w',c\zeta')/c$ $(c>0)$ と $\varphi_k(z,w',\zeta')$ はどちらも(1)の解であるから．)

この定理の証明は，ここでは省略する．上の形の解があるとして，形式解をまず求め，次にその収束を証明する，という方法でなされる．

定理 3.6.2. 線型微分作用素 $P(x,D_x)$ が原点 $0\in\boldsymbol{R}^n$ で $(1,0\cdots,0)$ 方向に関して正規双曲型であると仮定する．この時次の初期値問題(3.6.4)の解 $E(x,y')$ は $(x,y')=(0,0)$ の近傍で一つ，かつ唯一つ存在する (但し $y'=(y_2,\cdots,y_n)$)．

$$(3.6.4)\quad \begin{cases} P(x, D_x)\, E(x, y')=0 \\ \dfrac{\partial^j}{\partial {x_1}^j} E(x, y')|_{x_1=0}=\delta_{j,m-1}\delta(x'-y') \quad (j=0, \cdots, m-1) \end{cases}$$

［証明］ δ 函数の平面波展開の公式(本章命題 3.2.3)を背景に，まず，次の初期値問題を解くことを考えよう．

$$(3.6.5)\quad \begin{cases} P(x, D_x)F(x, y', \xi')=0 \\ \dfrac{\partial^j}{\partial {x_1}^j} F(x, y', \xi')|_{x_1=0}=\dfrac{(n-2)\ \delta_{j,m-1}}{(2\pi\sqrt{-1})^{n-1}(\langle x'-y', \xi'\rangle+\sqrt{-1}\,0)^{n-1}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (j=0, \cdots, m-1) \end{cases}$$

ここで，$P(x, D_x)$ は自然に，原点の $\boldsymbol{C}^n$ 内での近傍において定義された作用素 $P(z, D_z)$ に拡張されるから，定理 3.6.1 を

$$c_j=\frac{(n-2)!\ \delta_{j,m-1}}{(2\pi\sqrt{-1})^{n-1}}, \qquad l_j=n-1$$

として適用することができる．今，定理 3.6.1 の $\varphi_k(z, w', \zeta')$ は，(z, w', ζ') が実の時実であり(前掲注意 3)，しかも $\mathrm{grad}_z\varphi_k \neq 0$ が $\varphi_k=0$ の所で成り立つから，第2章定理 2.3.4(本章第1節例 3.1.2 も参照)により

$\Omega_k=\{(z, w', \zeta')\in\omega;\ \mathrm{Im}\varphi_k(z, w', \zeta')>0\}$ (但し，ここで ω は $(0, 0, \xi_0')$ $(\xi_0'\in\boldsymbol{R}^{n-1}-\{0\})$ の十分小さな近傍)

で一価正則な函数は，その境界値として超函数を定める．一方，Ω_k においては φ_k^j, $\log\varphi_k$ はいずれも一価正則である．従って；定理 3.6.1 で存在の保証された $u_k(z, w', \zeta')$ は (ω を十分小さくとれば) Ω_k で一価正則である．しかも先に注意したように(注意 2) $P(z, D_z)u_k=0$ がそこで成り立つから u_k の境界値として得られる超函数 $F_k(x, y', \xi')$ は $P(x, D_x)F_k(x, y', \xi')=0$ を満たしている．更に，$\varphi_k(z, w', \zeta')|_{z_1=0}=\langle z'-w', \zeta'\rangle$ であったから

$$\frac{\partial^j}{\partial {z_1}^j}\left(\sum_{k=1}^m u_k(z, w', \zeta')\right)\bigg|_{z_1=0}$$

は $\Omega_k\cap\{z_1=0\}$ で well-defined な一価正則函数であり，そこで

$$\frac{(n-2)!\ \delta_{j,m-1}}{(2\pi\sqrt{-1})^{n-1}\,(\langle z'-w', \zeta'\rangle)^{n-1}}$$

に等しい．従って

$$\frac{\partial^j}{\partial {x_1}^j}\left(\sum_{k=1}^m F_k(x, y', \xi')\right)\bigg|_{x_1=0}=\frac{(n-2)!\ \delta_{j,m-1}}{(2\pi\sqrt{-1})^{n-1}(\langle x'-y', \xi'\rangle+\sqrt{-1}\,0)^{n-1}}$$

が満たされる．

最後に，$F_k(x, y', \xi')$ を ξ' について $S^{n-1}_{\xi'}$ 上で積分して求める解 $E(x, y')$ を構成しよう．以前に注意したように，$\varphi_k(z, w', \zeta')$ は ζ' について一次斉次故，Euler の恒等式により

$$\left(\sum_{j=2}^{n} \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta_j} - j\right)\varphi_k^j = 0, \quad \sum_{j=2}^{n} \zeta_j \frac{\partial}{\partial \zeta_j} \log \varphi_k = 1$$

が成立する．従って，それ等の境界値も同様の関係式を満たす．従って，前節命題 3.5.1 により，$F_k(x, y', \xi')|_{|\xi'|=1}$ は well-defined である．よって，本章第 2 節定理 3.2.1 を適用して，

$$E_k(x, y') = \int_{\xi' \in S^{n-1}} F_k(x, y', \xi')\omega(\xi')$$

も well-defined である．ここで $\sum_{k=1}^{m} E_k(x, y') = E(x, y')$ ととれば $E(x, y')$ が所要の関係式をすべて満足することは明らかである．

このような $E(x, y')$ が存在すれば，それは一意であることは，Holmgren の定理(前節定理 3.5.1)の保証する所である．　(証終)

次に，$E(x, y')$ の特異性がどこにあるかを調べてみよう．ここで，$E(x, y')$ の特異性を microfunction の理論から考察することが如何に有用であるかが如実に示される．

定理 3.6.3. $(x, y'; \sqrt{-1}(\eta, \vartheta')\infty)$ が S.S. $E(x, y')$ に入っているならば，$\vartheta' = -\xi'$ であり (x, η) は，或る $\xi' \in \boldsymbol{R}^{n-1} - \{0\}$ に対して，$(0, y'; \lambda_k(0, y', \xi'), \xi')$ を通る，$\eta_1 - \lambda_k(x, \eta')$ の陪特性帯上にある．

注意.　今，$\lambda_k(x, \eta') \neq \lambda_l(x, \eta')$ $(k \neq l)$ と仮定しているから，$\eta_1 - \lambda_k(x, \eta')$ の陪特性帯の合併は P の陪特性帯に他ならない．

系 1.　$E(x, y')$ は，y' を通る陪特性曲線(即ち陪特性帯の底空間への射影)の集合の外では実解析的である．

注意.　このような集合を $P(x, D_x)$ の y' を頂点とする**特性錐状面** (characteristic conoid) と呼ぶことがある．

系 2.　$E(x, y')$ は y' を頂点とする錐体に台を持つ，即ち，作用素 P に対して**有限伝播**の現象が観察される．

［証明］　P が(正規)双曲型であることより y' を頂点とする特性錐状面は，適当な錐体に $(|x_1| \ll 1, |x' - y'| \ll 1$ ならば$)$ 含まれる．他方，Holmgren の定理(前節定理 3.5.1) によって $E(x, y')$ は $\{x | x_1 = 0,\ x' \neq y'\}$ の近傍で 0 となる．

然るに，特性錐状面の外では $E(x,y')$ は実解析的故，解析函数に対する一意接続定理により，求める結果が得られる．(系2の証終)

［定理 3.6.3 の証明］ 点 $(x,y',\xi')\in\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^{n-1}\times(\boldsymbol{R}^{n-1}-\{0\})$ における余接ベクトルを (η,ϑ',τ') を記すこととしよう $(\eta\in\boldsymbol{R}^n,\vartheta',\tau'\in\boldsymbol{R}^{n-1})$．ここで，第2章定理 2.3.4 を用いれば，(本章第1節例 3.1.2 も参照) Ω_k の定義により，

(3.6.6) $$\text{S.S.}F_k(x,y',\xi')\subset\{(x,y',\xi';\sqrt{-1}(\eta,\vartheta',\tau')\infty)\mid\varphi_k(x,y',\xi')=0,\ (\eta,\vartheta',\tau')=\alpha\operatorname{grad}_{(x,y',\xi')}\varphi_k(x,y',\xi')\ (\alpha>0)\}$$

となることが判る．ここで，更に定理 3.6.2 の証明中に触れた $\varphi_k(z,w',\zeta')^j$ 及び $\log\varphi_k(z,w',\zeta')$ の満たす Euler の関係式を考慮すれば，第4節定理 3.4.4 により，

(3.6.7) $$\text{S.S.}F_k(x,y',\xi')\subset\{(x,y',\xi';\sqrt{-1}(\eta,\vartheta',\tau')\mid\varphi_k(x,y',\xi')=0,\ (\eta,\vartheta',\tau')=\alpha\ \operatorname{grad}_{(x,y',\xi')}\varphi_k(x,y',\xi')\ (\alpha>0),\ \sum_{j=2}^n\xi_j\ \tau_j=0\}$$

を得る．

従って次に本章第1節定理 3.1.4 を用いれば，

(3.6.8) $$\text{S.S.}(F_k(x,y',\xi')|_{S^{n-1}_{\xi'}})\subset\{(x,y',\xi';\sqrt{-1}(\eta,\vartheta',\tau')\infty)\mid \varphi_k(x,y',\xi')=0,\ (\eta,\vartheta',\tau'+c\xi')=\alpha\ \operatorname{grad}_{(x,y'\xi')}\varphi_k(x,y',\xi')\ (\alpha>0,\ c;\ \text{実}),\ \sum_{j=2}^n\xi_j(\tau_j+c\xi_j)=0\}$$

なる関係式を得る．なお，ここで一般に，$\boldsymbol{R}^n$ の部分多様体 M に対し

(3.6.9) $$0\longrightarrow T^*_M\boldsymbol{R}^n\longrightarrow T^*\boldsymbol{R}^n\underset{\boldsymbol{R}^n}{\times}M\longrightarrow T^*M\longrightarrow 0$$

なる完全系列が存在すること，従って T^*M の点は $(x,\xi)\in T^*R^n\cong\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n$ を $T^*_M\boldsymbol{R}^n$ の元を法として考えたものと同一視できること (本章第1節例 3.1.3 参照)を用いた．即ち，(3.6.8)において τ' は $\tau'\bmod\operatorname{grad}_{\xi'}\xi'^2$，即ち $\tau'\bmod\xi'$ の略記である．従って本章第2節定理 3.2.1 により

(3.6.10) $$\text{S.S.}\int_{S^{n-1}_{\xi'}}F_k(x,y',\xi')\omega(\xi')\ \subset\Lambda_k,$$

但し，ここで $\Lambda_k\underset{\text{def}}{=}\{(x,y';\sqrt{-1}(\eta,\vartheta')\infty)\mid$ 或る $\xi'\in\boldsymbol{R}^n-\{0\}$ が存在して $\varphi_k(x,y',\xi')=0$, $(\eta,\vartheta')=\alpha\ \operatorname{grad}_{(x,y',\xi')}\varphi_k(x,y',\xi')$ $(\alpha>0)$ かつ $\alpha\operatorname{grad}_{\xi'}\varphi_k(x,y',\xi')=0\}$

となる．(ここで，上述の τ' に関する規約により，“適当な $c'\in\boldsymbol{R}$ に対し $\alpha\operatorname{grad}_{\xi'}\varphi_k(x,y',\xi')+c'\xi'=0$” が求める条件のはずであるが，$\varphi_k$ の ξ' に関す

る斉次性により $0=\langle\xi', \mathrm{grad}_{\xi'}\varphi_k(x,y',\xi')+c\xi'\rangle=\varphi_k(x,y',\xi')+c'\xi'^2=c'\xi'^2=$ $=c'$ となり，実は c' は 0 でなければいけないことが判ることに注意. なお，ここではやや迂遠な議論を用いたが，浜田 [1] における F_k の構成法を注意深く見れば，$F_k(x,y',\xi')$ は (microfunction としては) ξ' について斉次-$(n-1)$ 次であることが判り，$F_k\omega(\xi')$ を最初から $S_{\xi'}^{n-1}$ 上で定義されていると思って議論を進めることもできる. この場合，$T^*S_{\xi'}^{n-1}$ の点は $(\xi';\tau')$，但し，τ' は $\langle\xi',\tau'\rangle=0$ となるように正規化したもの，として最初から議論をしても構わないから (問: 何故か？)，$\varphi_k(x,y',\xi')=0$ ならば，$\langle\xi', \mathrm{grad}_{\xi'}\varphi_k(x,y',\xi')\rangle=0$ を考慮して，(3.6.6) から直ちに (3.6.10) が得られる，と言っても差し支えはない. 斉次函数を球面 (又は射影空間) 上で考える時，この種の "暗算" は常用される.)

さて，以上の考察により，S.S.$E_k(x,y')$ が評価できたから次に，(3.6.10) に現われた Λ_k の幾何学的意味を考えよう. その意味は次の補題により明らかにされる.

補題. $\mathrm{grad}_{\xi'}\varphi_k(x,y',\xi')$ および $\mathrm{grad}_{y'}\varphi_k(x,y',\xi')$ は $\eta_1-\lambda_k(x,\eta')$ の陪特性帯上一定である. 特に $\mathrm{grad}_{y'}\varphi_k=-\xi'$ が成立する.

[証明] $(x(s),\eta(s))_{|s|\ll 1}$ を考えている陪特性帯とする. この時

(3.6.11)
$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_j}\varphi_k(x(s),\ y',\xi')\right)\\
&=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x_l\partial\xi_j}\frac{dx_l}{ds}\\
&=\frac{\partial}{\partial\xi_j}(\lambda_k(x,\mathrm{grad}_{x'}\varphi_k(x,y',\xi')))\Big|_{x=x(s)}\\
&\qquad+\sum_{l=2}^{n}\left(\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x_l\partial\xi_j}\left(\left(-\frac{\partial\lambda_k(x,\eta')}{\partial\eta_l}\right)\Big|_{\eta'=\mathrm{grad}_{x'}\varphi}\right)\right)\Big|_{x=x(s)}\\
&=\sum_{l=2}^{n}\left(\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x_l\partial\xi_j}\left(\frac{\partial\lambda_k}{\partial\eta_l}\Big|_{\eta'=\mathrm{grad}_{x'}\varphi}\right)\right)\Big|_{x=x(s)}\\
&\qquad-\sum_{l=2}^{n}\left(\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x_l\partial\xi_j}\left(\frac{\partial\lambda_k}{\partial\eta_l}\Big|_{\eta'=\mathrm{grad}_{x'}\varphi}\right)\right)\Big|_{x=x(s)}\\
&=0
\end{aligned}$$

が成り立つから，$\mathrm{grad}_{\xi'}\varphi_k(x,y',\xi')$ は考えている陪特性帯上で一定である.

二番目の陳述についても同様である. (補題の証終)

定理 3.6.3 の証明に戻ろう. 今 $(x,y';\sqrt{-1}(\eta,\vartheta')\infty)\in\Lambda_k$ とする. ここで $\eta_1-\lambda_k(x,\eta')$ の陪特性帯 $(x(s),\eta(s))$ であって $(x(0),\eta(0))=(x,\eta)$ となるものを

考え，その $\{x_1=0\}$ との交わりの点を p^* とする．この時，補題により，p^* で $\mathrm{grad}_{\xi'}\varphi_k=0$ となっているはずである．他方，φ_k の満たすべき関係式(3.6.1)より $x_1=0$ ならば，$\mathrm{grad}_{\xi'}\varphi_k=x'-y'$ である．従って p^* において，$x'=y'$ が成り立つ．従って，再び(3.6.1)より p^* において $\mathrm{grad}_x\varphi_k=(\lambda_k(0,y',\xi'),\xi')$ となっている．故に，φ_k の構成法により(前出注意4) (x,η) は，$(0,y';\lambda_k(0,y',\xi'),\xi')$ を通る $\eta_1-\lambda_k(x,\eta')$ の陪特性帯の上に乗っている．又，補題により $\vartheta=-\xi'$ となっていることは明らかである．　(証終)

定理 3.6.4. $P(x,D_x)$ は，原点で$(1,0,\cdots,0)$方向に関して正規双曲型であるとする．この時，原点の近傍で，次の初期値問題(3.6.12)は一意に可解であり，しかも解 $u(x)$ の特異性スペクトルは，初期条件 $u_j(x')$ の特異性スペクトルから出る $P(x,D_x)$ の陪特性帯の集合に含まれる．

$$(3.6.12)\quad \begin{cases} P(x,D_x)u(x)=0 \\ \left.\dfrac{\partial^j}{\partial x_1{}^j}u(x)\right|_{x_1=0}=\mu_j(x') \qquad (j=0,1,\cdots,m-1) \end{cases}$$

［証明］ 定理3.6.3と全く同様の考察で，

$$\begin{cases} P(x,D_x)E_j(x,y')=0 \\ \left.\dfrac{\partial^l}{\partial x_1{}^l}E_j(x,y')\right|_{x_1=0}=\delta_{l,j}\,\delta(x'-y') \quad (0\leqq l,j\leqq m-1) \end{cases}$$

を満足する $E_j(x,y')$ であって定理3.6.3で構成された $E(x,y')$ と同様の特異性を持つものが構成できるから，

$$(3.6.13)\quad u(x)=\sum_{j=0}^{m-1}\int E_j(x,y')\mu_j(y')dy$$

と置けば，解が存在することは，容易に判る．詳しい検証は読者に委ねる．(積分が well-defined かどうかを注意深く調べる必要はある．積分領域がコンパクトになることに注意せよ．なお，超函数の層の脆弱性を用いて $\mu_j(y')$ の台をコンパクトとしておいて，原点の十分小さな近傍では，その操作が解 $u(x)$ に影響を与えないことを確かめるのも一つの方法である．後述の問参照．)

解の一意性は Holmgren の定理(前節定理3.5.1)に他ならない．

最後に S.S.$u(x)$ についての陳述を確かめることが残っているが，これは上の積分(3.6.13)が well-defined であることを確かめる所で殆んど完全に調べられているはずである．読者自ら確かめられたい．なお，$E(x,y')$ 或いは

$\mu(y')$ が実解析的な所からの寄与はないことを確かめることも忘れないように注意されたい.

問. どのような形状の領域に対して(3.6.12)の解の一意性が成立するかを考えてみる.

定理 3.6.3, 3.6.4 の陳述において, 陪特性帯が大きな役割を果した. 陪特性帯が特異性の"運び手"として重要であることは, クーラン・ヒルベルト [1] の頃から implicit には知られていたとも言い得るかも知れないが, それがはっきりと定式化される為には, microfunction の理論が必要であった. 実際, 前章第 4 節例 2.4.4 で与えた超函数を Cauchy データとして用いることにより, 正規双曲型作用素 P に対して, $Pu=0$ を満たし, しかも S.S.u が一本の陪特性帯に含まれるものを見出すことができることは明らかであり(河合 [2]) また, それ等を重ね合わせることにより, 例えば $P=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_2{}^2}$ と云う作用素の場合, $Pu=0$ を満たし, しかも, 円筒 $Z=\{(t, x_1, x_2)\in \boldsymbol{R}^3 \mid x_1{}^2+x_2{}^2\leqq 1\}$ の外では解析的ではなく, Z の内部では解析的となる u を見出すことは容易である. (ヒント: Z の境界の各点においてその点を通り, しかも Z に接するような陪特性曲線が存在する.) 然しながら, そのような解が存在することは, John 氏程の大家にとってすら不思議なことであったようである. 因みに, このような u の存在を示した John [3] に言う: What is remarkable is that this cylinder is not a characteristic surface for the differential equation. Apparently not *all* types of singularities propagate along characteristic surfaces (John [3] p.574). しかるに, 陪特性帯を解の特異性の構成要素として把握することに成功した我々にとって, この事実はごく自然なことである. ここ 20 年の間に, 如何に線型微分方程式の理解が深まったかを如実に示す一例と言えよう. 更に陪特性帯と云う概念は元来, 接触幾何学の概念であること, そして S^*M が最も基本的な接触多様体であること(古典的な Darboux の定理は, 任意の接触多様体は, 局所的には, S^*M の開集合と(接触多様体として)同型であることを主張する)から, 接触幾何学と, 線型微分方程式論の交錯を夢見ることは自然である (一階(非線型) 偏微分方程式論と接触幾何学とは表裏一体の物であることにも注意を喚起しておこう). この夢は次章で実現さ

れる．実際，次章第3節において，我々は，解の構造のみならず，方程式の構造を究める，と云う，一段と高い境地に到達するのである．

§7.　Microfunction の層の脆弱性

超函数の層 $\mathcal{B}_M$ は脆弱層である（第1章第1節定理 1.1.5）と云う著しい性質を持ち，これが解析学における超函数の有用性の大きな根拠であった．又，以下に示すように，$\mathcal{B}_M/\mathcal{A}_M$ が脆弱層であることは容易に示し得る．従って，次に問題となるのは，microfunction の層 $\mathcal{C}_M$ が脆弱層かどうか，ということである*)．以下に見るように，解答は肯定的である．

定理 3.7.1.　Microfunction の層 $\mathcal{C}_M$ は脆弱層である．

［証明］　$N=\sqrt{-1}\,S^*M$, $\pi\colon N\to M$ とする．$\mathcal{B}_N, \mathcal{A}_N$ により各々 N 上の超函数および実解析函数のなす層を記すものとしよう．

補題 1.　$\mathcal{B}_N/\mathcal{A}_N$ は脆弱層である．

［証明］　Ω を N の（向き付けられた）開集合とすれば，Grauert の定理（第1章第2節定理 1.2.3）により $H^1(\Omega, \mathcal{A}_N)=0$ が成り立つ．従って自明な完全系列

$$0\longrightarrow \mathcal{A}_N\longrightarrow \mathcal{B}_N\longrightarrow \mathcal{B}_N/\mathcal{A}_N\longrightarrow 0$$

により

$$\Gamma(\Omega, \mathcal{B}_N)\longrightarrow \Gamma(\Omega, \mathcal{B}_N/\mathcal{A}_N)\longrightarrow H^1(\Omega, \mathcal{A}_N)=0$$

なる完全系列を得る．他方 $\mathcal{B}_N$ は脆弱層であるから $\Gamma(N, \mathcal{B}_N)\to\Gamma(\Omega, \mathcal{B}_N)\to 0$ も完全系列である．従って右の可換図式を考えれば，$\Gamma(N, \mathcal{B}_N/\mathcal{A}_N)\to\Gamma(\Omega, \mathcal{B}_N/\mathcal{A}_N)$ も全射的であることは明らかである．従って $\mathcal{B}_N/\mathcal{A}_N$ は脆弱層である．

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(N, \mathcal{B}_N) & \to & \Gamma(N, \mathcal{B}_N/\mathcal{A}_N) \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ \Gamma(\Omega, \mathcal{B}_N) & \to & \Gamma(\Omega, \mathcal{B}_N/\mathcal{A}_N)\to 0 \\ \downarrow & & \\ 0 & & \end{array}$$

（補題1の証終）

以下，$\mathcal{C}_M$ の脆弱性を $\mathcal{B}_N/\mathcal{A}_N$ の脆弱性から導くことを目標とする．

今，もし層準同型写像 $\Phi\colon \mathcal{C}_M\to\mathcal{B}_N/\mathcal{A}_N$ および $\Psi\colon \mathcal{B}_N/\mathcal{A}_N\to\mathcal{C}_N$ が存在して $\Psi\circ\Phi=1$ が満たされたとしよう．この時 $u\in\mathcal{C}_M(\Omega)$ に対して $\Phi(u)\in\Gamma(\Omega, \mathcal{B}_N/\mathcal{A}_N)$ であるから，補題1により $s\in\Gamma(N, \mathcal{B}_N/\mathcal{A}_N)$ で $s|_\Omega=\Phi(u)$ とな

---

*)　$\pi_*\mathcal{C}_M\cong\mathcal{B}_M/\mathcal{A}_M$ であるから，$\mathcal{C}_M$ が脆弱層ならば $\mathcal{B}_M/\mathcal{A}_M$ が脆弱層であることは明らかであるが，$\mathcal{B}_M/\mathcal{A}_M$ の脆弱性から $\mathcal{C}_M$ の脆弱性が直ちに従う訳ではない．

るものが存在する．すると $\Psi(s)\in\Gamma(N, \mathcal{C}_M)$ かつ $\Psi(s)|_\Omega=\Psi\circ\Phi(u)=u$ となるから $\mathcal{C}_M$ は脆弱層になる．従って $\Psi\circ\Phi=1$ となる Φ, Ψ を構成すればよいことが判った．又，一般に脆弱性は局所的な問題であるから（第1章第1節定理 1.1.3)，$M=\boldsymbol{R}^n$, $N=\sqrt{-1}\,S^*M\cong\boldsymbol{R}^n\times S^{n-1}$ の場合に証明すればよいことは明らかである．ここで本章第4節定理 3.4.1 を思い出そう．$K(x,\xi)\in\mathcal{C}_N$ で $\mathrm{Supp}K(x,\xi)\subset\{(x,\xi;\ \sqrt{-1}\langle\xi, dx\rangle\infty)\in\sqrt{-1}\,S^*N \mid x=0\}$ となるものを考えれば，$K(x-y,\ \xi)dy\in\mathcal{C}_{N\times M}\otimes v_M$ に対して明らかに $\mathrm{Supp}\ K(x-y,\xi)dy\subset Z=\{(x,\xi,y;\ \sqrt{-1}\ \langle\xi, d(x-y)\rangle\infty) \mid x=y\}$ が満たされる．又，定義により $z=(x,\xi,y;\ \sqrt{-1}\ \langle\xi, d(x-y)\rangle\infty)\in Z$ に対して $p_1(z)=(x,\xi,\sqrt{-1}\ \langle\xi, dx\rangle\infty)\in\sqrt{-1}\,S^*N$, $p_2^a(z)=(y,\sqrt{-1}\langle\xi, dy\rangle\infty)\in\sqrt{-1}\,S^*M$*) となる．ここで $\sqrt{-1}\,S^*N$ の部分集合 G を $G=\{(x,\xi;\ \sqrt{-1}\ \langle\xi, dx\rangle\infty)\}$ と定義しよう．そうすれば $(p_1|_Z)_!(p_2^a|_Z)^{-1}\mathcal{C}_M=(\pi_N|_G)^{-1}\mathcal{C}_M$ であるから，定理 3.4.1 により

$$(\pi_N|_G)^{-1}\mathcal{C}_M\longrightarrow\mathcal{H}_G^0(\mathcal{C}_N)$$

なる層準同型写像が得られる．即ち

$$\mathcal{C}_M\longrightarrow(\pi_N|_G)_*\mathcal{H}_G^0(\mathcal{C}_N)=\pi_{N*}(\mathcal{H}_G^0(\mathcal{C}_N))\subset\pi_{N*}(\mathcal{C}_N)=\mathcal{B}_N/\mathcal{A}_N$$

なる層準同型写像が得られる．この準同型写像を Φ としよう．即ち

$$\Phi:\ u(x)\longmapsto\int K(x-y,\xi)u(y)dy$$

である．次に $\mathrm{Supp}\ T(x,\xi)\subset\{(x,\xi;\ \sqrt{-1}\ \langle\xi, dx\rangle\infty) \mid x=0\}$ となる $T(x,\xi)\in\mathcal{C}_N$ を選べば $\mathrm{Supp}\ T(x-y,\xi)\subset\{(x,y,\xi;\sqrt{-1}\ \langle\xi,\ d(x-y)\rangle\infty) \mid x=y\}=Z$ であり，また，$z=(x,y,\xi;\sqrt{-1}\ \langle\xi, d(x-y)\rangle\infty)$ に対して定義により $p_1(z)=(x;\sqrt{-1}\ \langle\xi, dx\rangle\infty)\in N=\sqrt{-1}\,S^*M$, $p_2^a(z)=(y,\xi;\sqrt{-1}\ \langle\xi, dy\rangle\infty)\in\sqrt{-1}S^*N$ であるから本章第4節定理 3.4.1 により

$$(p_1|_Z)_!(p_2^a|_Z)^{-1}\mathcal{C}_N\longrightarrow\mathcal{C}_M$$

なる層準同型写像が存在することが判る．然るに $(p_1|_Z)_!(p_2^a|_Z)^{-1}\mathcal{C}_N=\pi_{N*}(\mathcal{C}_N|_G)\subset\pi_{N*}(\mathcal{C}_N)=\mathcal{B}_N/\mathcal{A}_N$ であるから，結局 $\Psi:\mathcal{B}_N/\mathcal{A}_N\to\mathcal{C}_M$ なる層準同型写像が得られたことになる．即ち，

$$\Psi:\ u(x,\xi)\longmapsto\int T(x-y,\xi)u(y,\xi)dy\omega(\xi)$$

と定めた．さてこの時 $\Psi\circ\Phi$ を計算してみよう．

*) 記号については本章第4節図 3.4.1 を参照のこと．

$$\Psi\circ\Phi : u(x) \longmapsto \int T(x-x',\xi)dx'\omega(\xi)\int K(x'-y,\xi)u(y)dy =$$
$$= \int u(y)dy \int T(x-x',\xi)K(x'-y,\xi)dx'\omega(\xi) =$$
$$= \int u(y)dy \int T(x-y-x',\xi)K(x',\xi)dx'\omega(\xi)$$

が成り立つ．従って

$$\int T(x-y-x',\xi)K(x',\xi)dx'\omega(\xi) = \delta(x-y)$$

となるように T, K を選ぶことができれば，$\Psi\circ\Phi=1$ を得る．以上により，問題は

(3.7.1)　$\mathrm{Supp}K(x,\xi)$，$\mathrm{Supp}\,T(x,\xi) \subset \{(x,\xi;\ \sqrt{-1}\,\langle\xi, dx\rangle\infty) \mid x=0\}$

ならびに

(3.7.2)　$\displaystyle\int T(x-y,\xi)K(y,\xi)dy\ \ \omega(\xi) = \delta(x)$

なる二条件を満足する $K(x,\xi)$，$T(x,\xi) \in \mathcal{C}_N$ を構成する問題に帰着された．

このような K, T の構成の為に δ-函数の平面波分解に関係した補題をいくつか準備しよう．特に次の補題2はそれ自身としても興味深く，理論上も重要である．

補題 2.　$\varphi_j(x,\xi)\,(j=1,\cdots,n)$ を $\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n$ で定義された(実数値とは限らない)実解析函数とする．ここで $\Phi(x,\xi) \underset{\mathrm{def}}{=} (\varphi_1(x,\xi),\cdots,\varphi_n(x,\xi))$ は ξ について一次斉次であり，しかも $\Phi(0,\xi)=\xi$ となっているとする．更に $\langle x, \Phi(x,\xi)\rangle$ は正型*) であると仮定する．この時

$$\delta(x) = \frac{(n-1)!}{(-2\pi\sqrt{-1}\,)^n}\int \frac{J(x,\xi)}{(\langle x,\Phi(x,\xi)\rangle + \sqrt{-1}\,0)^n}\omega(\xi)$$

が成り立つ．但し，ここで $J(x,\xi) = \det\left(\dfrac{\partial\Phi(x,\xi)}{\partial\xi}\right) = \det\left(\dfrac{\partial\varphi_i(x,\xi)}{\partial\xi_j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ とした．

注意.　形式的には，これは δ-函数の平面波分解の公式

$$\delta(x) = \frac{(n-1)!}{(-2\pi\sqrt{-1}\,)^n}\int \frac{\omega(\zeta)}{(\langle x,\zeta\rangle + \sqrt{-1}\,0)^n}$$

において $\zeta=\Phi(x,\xi)$ と変数変換したものに過ぎないが $\Phi(x,\xi)$ が実数値とは限らないから証明を要する．

[証明]　仮定により $\langle x,\Phi(x,\xi)\rangle$ は正型であるから，

---

*)　第2章定義 2.4.2 参照．

$F(x)=\int \frac{J(x,\xi)}{(\langle x,\Phi(x,\xi)\rangle+\sqrt{-1}\,0)^n}\omega(\xi)$ は超函数として well-defined であることにまず注意しておこう．

次に，$z(\in C^n)$ の多価函数 Φ を $\Phi(z)=\int \frac{J(z,\xi)}{\langle z,\Phi(z,\xi)\rangle^n}\omega(\xi)$ と定めよう．今，もし $z_j\Phi(z)=0$ $(j=1,\cdots,n)$ が言えれば，$\mathrm{Im}\langle z,\Phi(z,\xi)\rangle>0$ なる（ξ に依存する）領域から $J(z,\xi)/\langle z,\Phi(z,\xi)\rangle^n$ の境界値を考えることにより $J(x,\xi)/(\langle x,\Phi(x,\xi)\rangle+\sqrt{-1}\,0)^n$ の意味が与えられるから $x_jF(x)=0(j=1,\cdots,n)$ が成り立ち，従って $F(x)$ は原点にのみ台を持つ超函数であることが判る．そこで $z_j\Phi(z)=0(j=1,\cdots,n)$ をまず証明しよう．ここで，一般に d を外微分作用素，ι を内部積とすれば

$$d(f\iota_{\frac{\partial}{\partial\zeta_j}}\omega(\zeta))=$$
$$\frac{\partial f}{\partial\zeta_j}\omega(\zeta)+(-1)^j\Big((n-1)f+\sum_k\zeta_k\frac{\partial f}{\partial\zeta_k}\Big)d\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\zeta_{j-1}\wedge d\zeta_{j+1}\wedge\cdots\wedge d\zeta_n$$

となることは，定義に従って計算すれば直ちに確かめられる（松島 [1]参照）．従って特に f が $(1-n)$ 次斉次ならば $\frac{\partial f}{\partial\zeta_j}\omega(\zeta)=d(f\iota_{\frac{\partial}{\partial\zeta_j}}\omega(\zeta))$ となる．この関係式を用いれば

$$z_jF(z)=\int\frac{z_jJ(z,\xi)}{\langle z,\Phi\rangle^n}\omega(\xi)=\int\frac{z_j}{\langle z,\zeta\rangle^n}\omega(\zeta)=$$
$$=\int\frac{\partial}{\partial\zeta_j}\Big(\frac{1}{(1-n)\langle z,\zeta\rangle^{n-1}}\Big)\omega(\zeta)=\int d\Big(\frac{1}{(1-n)\langle z,\zeta\rangle^{n-1}}\iota_{\frac{\partial}{\partial\zeta_j}}\omega(\zeta)\Big)=0$$

を得る．従って $F(x)$ が原点にしか台を持たない超函数であることが判った．

一方，

$$\Big(\sum_{i=1}^n x_iD_i\Big)F=\sum_{i=1}^n(D_ix_i-1)F=-nF$$

が成り立つから $F(x)$ は $(-n)$ 次斉次である．従って本章5第節命題3.5.3の系により $F(x)=c\delta(x)$ を得る．

次に定数 c を計算しよう．$\mathrm{sp}\,F=c\,\mathrm{sp}\,\delta$ であるから $(0,\sqrt{-1}d(x_1+\cdots+x_n)\infty)$ の近傍で考えて c を求めればよい．今，

$G_z=\{\zeta=\Phi(tz,\xi)\mid 0\leqq t\leqq 1,\ \xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n),\ \xi_1+\cdots+\xi_n=1,\ \xi_i\geqq 0\ (1\leqq i\leqq n)\}$

$\Gamma_z=\{\zeta=\Phi(z,\xi)\mid \xi_1+\cdots+\xi_n=1,\ \ \xi_i\geqq 0\ \ (1\leqq i\leqq n)\}$

$\Gamma_0=\{\xi\mid \xi_1+\cdots+\xi_n=1,\ \ \xi_i\geqq 0\ \ (1\leqq i\leqq n)\}$

$G_j=\{\zeta=\Phi(tz,\xi)\mid 0\leqq t\leqq 1,\ \xi_1+\cdots+\xi_n=1,\ \xi_j=0$ かつ任意の $i(\neq j)$ に対し

$\xi_i \geqq 0\}$ $(j=1, \cdots, n)$

と定めれば G_z の境界 ∂G_z が $\Gamma_z \cup \Gamma_0 \cup G_1 \cup \cdots \cup G_n$ に等しいことは明らかである．一方，ストークス (Stokes) の定理により $\displaystyle\int_{\partial G_z} \frac{\omega(\zeta)}{\langle z, \zeta\rangle^n} = \int_{G_z} d\frac{\omega(\zeta)}{\langle z, \zeta\rangle^n} = 0$*) が成立するから向き付けを考慮すれば結局，$\displaystyle\int_{\Gamma_z} \frac{\omega(\zeta)}{\langle z, \zeta\rangle^n} = \int_{\Gamma_0} \frac{\omega(\zeta)}{\langle z, \zeta\rangle^n} + \sum_{j=1}^n \int_{G_j} \frac{\omega(\zeta)}{\langle z, \zeta\rangle^n}$ を得る．従って，$(0, \sqrt{-1}\, d(x_1+\cdots+x_n)\infty)$ の近傍において

$$F(x) = b\left(\int_{\xi_i \geqq 0\,(1 \leqq i \leqq n)} \frac{J(z, \xi)}{\langle z, \Phi(z, \xi)\rangle^n} \omega(\xi)\right) = b\left(\int_{\Gamma_z} \frac{\omega(\zeta)}{\langle z, \zeta\rangle^n}\right) =$$

$$= b\left(\int_{\Gamma_0} \frac{\omega(\zeta)}{\langle z, \zeta\rangle^n}\right) + \sum_{j=1}^n b\left(\int_{G_j} \frac{\omega(\zeta)}{\langle z, \zeta\rangle^n}\right)$$

が成り立つ．然るに

$$b\left(\int_{\Gamma_0} \frac{\omega(\zeta)}{\langle z, \zeta\rangle^n}\right) = \int \frac{\omega(\xi)}{(\langle x, \xi\rangle + \sqrt{-1}\,0)^n} = \frac{(-2\pi\sqrt{-1})^n}{(n-1)!}\delta(x)$$

であるから microfunction として

$$b\left(\int_{G_j} \frac{\omega(\zeta)}{\langle z, \zeta\rangle^n}\right) = 0$$

がすべての j について成り立つことを示せば

$$F(x) = \frac{(-2\pi\sqrt{-1})^n}{(n-1)!}\delta(x),$$

従って

$$\delta(x) = \frac{(n-1)!}{(-2\pi\sqrt{-1})^n} \int \frac{J(x, \xi)}{\langle x, \Phi\rangle^n} \omega(\xi)$$

を得る．さて第2章命題2.4.3より実解析函数 $\varphi(x)$ が正型であって $\varphi(0)=0$ かつ $d\varphi(0)=\xi$ を満たす時，z が十分小さくて $\langle \mathrm{Im} z, \xi\rangle > \varepsilon|\mathrm{Im} z|$ が成り立つ限り，$\varphi(z) \neq 0$ が成立することが判っている．これを $\langle z, \Phi(z, \xi)\rangle = \langle z, \zeta\rangle$ に適用すると，G_j においては $\sum_{k \neq j} (\mathrm{Im} z_k)\xi_k = \sum_k (\mathrm{Im} z_k)\xi_k > \varepsilon|\mathrm{Im} z|$ ならば $\langle z, \zeta\rangle \neq 0$ となる．特に $D_j = \{z|$ 任意の $k(\neq j)$ に対して $\mathrm{Im} z_k > \varepsilon|\mathrm{Im} z|\}$ とした時，$z \in D_j$ かつ $\zeta \in G_j$ ならば $\langle z, \zeta\rangle \neq 0$ となる．従って $\displaystyle\int_{G_j} \frac{\omega(\zeta)}{\langle z, \zeta\rangle^n}$ は D_j 上で正則である．よって

$$b\left(\int_{G_j} \frac{\omega(\zeta)}{\langle z, \zeta\rangle^n}\right) = b_{D_j}\left(\int_{G_j} \frac{\omega(\zeta)}{\langle z, \zeta\rangle^n}\right)$$

を得る．一方，D_j は

---

*) $(n-1)$ 次元の空間の上の n-型式は0であることに注意．

$U_j=\{(0+\sqrt{-1}(v_1,\cdots,v_n)0)|$ 任意の $k(\neq j)$ に対して $v_k>\varepsilon\sqrt{v_1{}^2+\cdots+v_n{}^2}\}$ の錐状近傍であるから，第2章定理 2.3.5 により $b_{D_j}\left(\int_{G_j}\frac{\omega(\zeta)}{\langle z,\zeta\rangle^n}\right)$ の特異性スペクトルは U_j° に含まれる．ところが定義により

$$U_j^\circ\cap\{x=0\}=\{(0,\sqrt{-1}(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_n)\infty|\ \text{任意の}\ k(\neq j)\ \text{に対して}$$
$$v_k>\varepsilon\sqrt{v_1{}^2+\cdots+v_n{}^2}\ \text{となる}\ (v_1,\cdots,v_n)\ \text{に対して}\ \sum_{i=1}^n\xi_iv_i>0\}$$

であるから $(0,\sqrt{-1}(1,\cdots,1)\infty)\notin U_j^\circ$ である．実際，任意の $k(\neq j)$ に対し $v_k>\varepsilon\sqrt{v_1{}^2+\cdots+v_n{}^2}$ かつ $\sum_{i=1}^n v_i<0$ となる $(v_1,\cdots,v_n)\in\boldsymbol{R}^n$ が (ε を十分小さく取れば)存在することは明らかだからである．従って $(0,\sqrt{-1}(dx_1+\cdots+dx_n))$ の近傍で $b\left(\int_{G_j}\frac{\omega(\zeta)}{\langle z,\zeta\rangle^n}\right)=0$ を得る． (補題2の証終)

補題 3. $\alpha,\beta\in\boldsymbol{C}$, $\mathrm{Re}\alpha=\mathrm{Re}\beta=0$, $\mathrm{Im}\alpha>0$ とする．この時

$$\delta(x)=\frac{(n-1)!}{(-2\pi\sqrt{-1})^n}\times$$
$$\int_{|\xi|=1}\frac{(1-\beta\langle x,\xi\rangle)^{n-1}(1+(\alpha-\beta)\langle x,\xi\rangle+\alpha\beta(1-\beta\langle x,\xi\rangle))^{n-2}(|x|^2-\langle x,\xi\rangle^2)}{(\langle x,\xi\rangle+\alpha|x|^2-\beta\langle x,\xi\rangle^2+\sqrt{-1}\,0)^n)}\omega(\xi)$$

が成り立つ．特に $\alpha=\beta$ として

$$\delta(x)=\frac{(n-1)!}{(-2\pi\sqrt{-1})^n}\times$$
$$\times\int_{|\xi|=1}\frac{(1-\alpha\langle x,\xi\rangle)^{n-1}+\alpha^2(1-\alpha\langle x,\xi\rangle)^{n-2}(|x|^2-\langle x,\xi\rangle^2)}{(\langle x,\xi\rangle+\alpha(|x|^2-\langle x,\xi\rangle^2)+\sqrt{-1}\,0)^n}\omega(\xi)$$

を得る*)．

[証明] $\Phi(x,\xi)=\xi+\alpha|\xi|x-\frac{\beta\langle x,\xi\rangle}{|\xi|}\xi$ とおけば，補題2の条件が満たされていることは容易に確かめ得る．この Φ に対して $J(x,\xi)=\det\left(\frac{\partial\Phi(x,\xi)}{\partial\xi}\right)$を計算してみよう．$\Phi(x,\ \xi)=(\varphi_1,\ \cdots,\ \varphi_n)$ とすれば $\varphi_j(x,\ \xi)=\xi_j+\alpha|\xi|x_j-\frac{\beta\langle x,\xi\rangle}{|\xi|}\xi_j$ となるから $d\varphi_1\wedge\cdots\wedge d\varphi_n=J(x,\xi)d\xi_1\wedge\cdots\wedge d\xi_n$ によって $J(x,\xi)$ を求めればよい．$d\varphi_i=(1-\beta\langle x,\xi\rangle)d\xi_i+(\alpha x_i+\beta\langle x,\xi\rangle\xi_i)d|\xi|-\beta\xi_i\langle x,d\xi\rangle$ および$d|\xi|=\sum_{i=1}^n\xi_id\xi_i$ が成り立つから ($|\xi|=1$ のところで問題を考えていることに注意)

$$d\varphi_1\wedge\cdots\wedge d\varphi_n=(1-\beta\langle x,\xi\rangle)^nd\xi_1\wedge\cdots\wedge d\xi_n+$$

*) この補題の公式において右辺は ξ について斉次でないので，計算はすべて $|\xi|=1$ に限って行わねばならない．

$$+(1-\beta\langle x,\xi\rangle)^{n-1}\Bigl(\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i+\beta\langle x,\xi\rangle\xi_i)d\xi_1\wedge\cdots\wedge d\overset{i}{\check{|\xi|}}\wedge\cdots\wedge d\xi_n\Bigr)+$$

$$+(1-\beta\langle x,\xi\rangle)^{n-1}\Bigl(\sum_{i=1}^{n}(-\beta\xi_i)d\xi_1\wedge\cdots\wedge\langle x,\overset{i}{\check{d\xi}}\rangle\wedge\cdots\wedge d\xi_n\Bigr)+(1-\beta\langle x,\xi\rangle)^{n-2}\times$$

$$\times\sum_{i\neq j}(\alpha x_i+\beta\langle x,\xi\rangle\xi_i)(-\beta\xi_j)d\xi_1\wedge\cdots\wedge d\overset{i}{\check{|\xi|}}\wedge\cdots\wedge\langle\overset{j}{\check{x}},d\xi\rangle\wedge\cdots\wedge d\xi_n{}^{*)}=$$

$$=[(1-\beta\langle x,\xi\rangle)^n+(1-\beta\langle x,\xi\rangle)^{n-1}(\alpha+\beta)\langle x,\xi\rangle)-(1-\beta\langle x,\xi\rangle)^{n-1}\beta\langle x,\xi\rangle$$

$$+\alpha\beta(|x|^2-\langle x,\xi\rangle^2)(1-\beta\langle x,\xi\rangle)^{n-2}]d\xi_1\wedge\cdots\wedge d\xi_n=$$

$$=[(1-\beta\langle x,\xi\rangle)^{n-1}(1+(\alpha-\beta)\langle x,\xi\rangle)+\alpha\beta(1-\beta\langle x,\xi\rangle)^{n-2}(|x|^2-$$

$$\langle x,\xi\rangle^2)]d\xi_1\wedge\cdots\wedge d\xi_n$$

を得る．従って補題2により求める結果を得る．

（補題3の証終）

補題 4.　$\mathrm{Im}\,\alpha>0$ なる $\alpha\in\boldsymbol{C}$ に対して有限個の $c_{jk}\in\boldsymbol{C}$ を適当に選べば

$$\delta(x)=\sum_{j,k}c_{jk}\int_{|\xi|=1}\frac{(|x|^2-\langle x,\xi\rangle^2)^j}{(\langle x,\xi\rangle+\alpha(|x|^2-\langle x,\xi\rangle^2)+\sqrt{-1}\,0)^{n-k}}\omega(\xi)$$

が成立する．

［証明］　$t=\langle x,\xi\rangle+\alpha(|x|^2-\langle x,\xi\rangle^2)$，$y=|x|^2-\langle x,\xi\rangle^2$ とおくと

$$\frac{(n-1)!}{(-2\pi\sqrt{-1})^n}\frac{(1-\alpha\langle x,\xi\rangle)^{n-1}+\alpha^2(1-\alpha\langle x,\xi\rangle)^{n-2}(|x|^2-\langle x,\xi\rangle^2)}{(\langle x,\xi\rangle+\alpha(|x|^2-\langle x,\xi\rangle^2))^n}$$

$$=\frac{(n-1)!}{(-2\pi\sqrt{-1})^n}\frac{(1-\alpha t+\alpha^2y)^{n-1}+\alpha^2y(1-\alpha t+\alpha^2y^{n-2}}{t^n}=\sum_{j,k}c_{jk}\frac{y^j}{t^{n-k}}$$

となる $c_{jk}\in\boldsymbol{C}$ が存在することは容易に判る．従って補題3により

$$\delta(x)=\sum_{j,k}c_{jk}\int_{|\xi|=1}\frac{y^j}{(t+\sqrt{-1}\,0)^{n-k}}\omega(\xi)$$

$$=\sum_{j,k}c_{jk}\int_{|\xi|=1}\frac{(|x|^2-\langle x,\xi\rangle^2)^j}{\langle(x,\xi\rangle+\alpha(|x|^2-\langle x,\xi\rangle^2)+\sqrt{-1}\,0)^{n-k}}\omega(\xi)$$

を得る．　　　　　　　　　　　　　　　　　　（補題4の証終）

補題 5.　(1)　$\displaystyle\int(t+\sqrt{-1}\,0)^\alpha(x-t+\sqrt{-1}\,0)^\beta dt=$

$$=2\pi\sqrt{-1}\frac{\Gamma(-\alpha-\beta-1)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)}(x+\sqrt{-1}\,0)^{\alpha+\beta+1}$$

(2)　$\displaystyle\int(x_1{}^2+\cdots+x_n{}^2+c)^\lambda dx_1\cdots dx_n=\pi^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\left(-\lambda-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda)}c^{\lambda+\frac{n}{2}}$　　$(c>0)$

(3)　$\mathrm{Im}\,\alpha,\mathrm{Im}\,\beta>0$ として

---

*)　ここで，例えば，$d\overset{i}{|\xi|}$ は $d\xi_i$ を $d|\xi|$ で置き換えたの意．

$$\int(\langle x-y,\xi\rangle+\alpha(|x-y|^2-\langle x-y,\xi\rangle^2))^\lambda(\langle y,\xi\rangle+\beta(|y|^2-\langle y,\xi\rangle^2))^\mu dy$$

$$=-2\pi^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{-1}\frac{\Gamma\left(-\lambda-\mu-\dfrac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda)\Gamma(-\mu)}(\alpha+\beta)^{-\frac{n-1}{2}}\times$$

$$\times(\langle x,\xi\rangle+\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}(|x|^2-\langle x,\xi\rangle^2))^{\lambda+\mu+\frac{n+1}{2}}$$

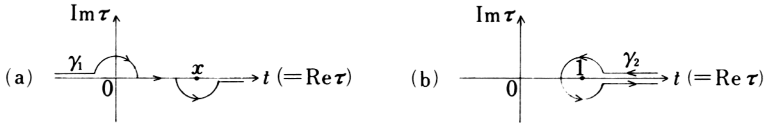


図 3.5.1.

［証明］ $u(x)=\int(t+\sqrt{-1}0)^\alpha(x-t+\sqrt{-1}\,0)^\beta dt$ は microfunction の積分としては well-defined であり，Supp $u(x)=\{0,\sqrt{-1}\,dx\infty)\}$ となっている．他方，$u(cx)=c^{\alpha+\beta+1}u(x)$ は明らかである．従って $u(x)=c(x+\sqrt{-1}0)^{\alpha+\beta+1}$ を得る．この定数 c を求めよう．Microfunction の積分の定義により，γ_1 を図 3.5.1 (a) で与えられたものとして

$$u(x)=\int_{\gamma_1}\tau^\alpha(x-\tau)^\beta d\tau$$

が成り立つことは容易に判る．更に，これは，microfunction の積分としては図 3.5.1(b) で与えられる γ_2 を用いて定義された積分

$$\int_{\gamma_2}\tau^\alpha(x-\tau)^\beta d\tau$$

に等しい．従って

$$c=\int(t+\sqrt{-1}\,0)^\alpha(1-t+\sqrt{-1}\,0)^\beta dt=\int_{\gamma_2}\tau^\alpha(1-\tau)^\beta d\tau=$$

$$=\int_1^\infty t^\alpha[(t-1)^\beta e^{\pi\sqrt{-1}\beta}-(t-1)^\beta e^{-\pi\sqrt{-1}\beta}]dt=2\sqrt{-1}\sin\pi\beta B(\beta+1,-\alpha-\beta-1)=$$

$$=2\sqrt{-1}\sin\pi\beta\frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(-\alpha-\beta-1)}{\Gamma(-\alpha)}=-2\pi\sqrt{-1}\frac{\Gamma(-\alpha-\beta-1)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)}$$

を得る*)．

---

*) ここで $B(p,q)$ はベータ函数，即ち $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\left(=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\right)$ である．なお，ここの計算は，厳密には $\int_{\gamma_2}\tau^\alpha(1-\tau)^\beta d\tau$ が絶対収束する時にのみ行い得る．しかしながら一般の (α,β) に対しても，次節の議論を用いて解析接続の手法により結果は正しい．この注意は以下の計算にも適用される．

次に(2)を証明しよう．$x_i=r\xi_i$ $(\xi_1{}^2+\cdots+\xi_n{}^2=1)$ と変数変換すれば

$$\text{左辺}=\int_0^\infty (r^2+c)^\lambda r^{n-1}dr\int_{|\xi|=1}\omega(\xi)$$

である．然るに $\int_{|\xi|=1}\omega(\xi)$ は S^{n-1} の面積であるから $\dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ に等しい．他方，

$$\int_0^\infty (x+1)^\lambda x^{\frac{n}{2}-1}dx=\int_1^\infty x^\lambda(x-1)^{\frac{n}{2}-1}dx=\int_1^0\frac{1}{x^\lambda}\cdot\left(\frac{1}{x}-1\right)^{\frac{n}{2}-1}\left(-\frac{dx}{x^2}\right)$$

$$=\int_0^1 x^{-\lambda-\frac{n}{2}-1}(1-x)^{\frac{n}{2}-1}dx=B\left(-\lambda-\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-\lambda-\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda)}$$

が成り立つ．従って，

$$\int_0^\infty (r^2+c)^\lambda r^{n-1}dr=\frac{1}{2}c^{\lambda+\frac{n}{2}}\int_0^\infty (x+1)^\lambda x^{\frac{n-1}{2}}dx$$

により

$$(2)\text{の左辺}=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{c^{\lambda+\frac{n}{2}}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(-\lambda-\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda)}=\pi^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\left(-\lambda-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda)}c^{\lambda+\frac{n}{2}}$$

を得る．

最後に(3)を証明しよう．(3)の両辺は ξ に関して回転群の作用で不変であるから $\xi=(1,0,\cdots,0)$ の場合，即ち，

$$(3.7.3)\quad \int (x_1-y_1+\alpha((x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2))^\lambda(y_1+\beta(y_2{}^2+\cdots+y_n{}^2))^\mu dy$$

$$=-2\pi^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{-1}\,\frac{\Gamma\left(-\lambda-\mu-\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda)\Gamma(-\mu)}(\alpha+\beta)^{-\frac{n-1}{2}}\times$$
$$\times\left(x_1+\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}(x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2)\right)^{\lambda+\mu+\frac{n+1}{2}}$$

を証明すれば十分である．y_1 の積分に関して(1)を用いて $y_i-\dfrac{\alpha x_i}{\alpha+\beta}$ を改めて y_i とおけば

$$(3.7.3)\text{ の左辺}=-2\pi\sqrt{-1}\,\frac{\Gamma(-\lambda-\mu-1)}{\Gamma(-\lambda)\Gamma(-\mu)}\times$$
$$\times\int\left(x_1+\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}(x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2)+(\alpha+\beta)(y_2{}^2+\cdots+y_n{}^2)\right)^{\lambda+\mu+1}dy_2\cdots dy_n$$

となる．ここで(2)を用いれば，これは

$$-2\pi\sqrt{-1}\,\frac{\Gamma(-\lambda-\mu-1)}{\Gamma(-\lambda)\Gamma(-\mu)}(\alpha+\beta)^{\lambda+\mu+1}\times$$

$$\times\pi^{\frac{n-1}{2}}\frac{\Gamma\left(-\lambda-\mu-1-\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda-\mu-1)}\left\{\frac{x_1}{\alpha+\beta}+\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}(x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2)\right\}^{\lambda+\mu+1+\frac{n-1}{2}}$$

に等しくなる．これは(3.7.3)の右辺に他ならない． (補題 5 の証終)

以上により準備が完了したので，定理 3.7.1 の証明に戻ろう．今，$L_{\lambda,\mu}$ および K_μ を各々，

$$L_{\lambda,\mu}(\alpha,x,\xi)=\frac{\Gamma(-\lambda)\Gamma(-\mu)}{2\pi^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{-1}\,\Gamma\left(-\lambda-\mu-\frac{n+1}{2}\right)}\times$$

$$\times(\alpha+\sqrt{-1})^{\frac{n-1}{2}}(\langle x,\xi\rangle+\alpha(|x|^2-\langle x,\xi\rangle^2))^\lambda$$

および

$$K_\mu(x,\xi)=(\langle x,\xi\rangle+\sqrt{-1}(|x|^2-\langle x,\xi\rangle^2))^\mu$$

により定めれば，補題 5 の(3)により

$$\int L_{\lambda,\mu}(\alpha,x-y,\xi)K_\mu(y,\xi)dy=-\left(\langle x,\xi\rangle+\frac{\alpha\sqrt{-1}}{\alpha+\sqrt{-1}}(|x|^2-\langle x,\xi\rangle^2)\right)^{\lambda+\mu+\frac{n+1}{2}}$$

を得る．従って

$$\left(-(\alpha+\sqrt{-1})^2\frac{d}{d\alpha}\right)^j\int L_{\lambda,\mu}(\alpha,x-y,\xi)K_\mu(y,\xi)dy$$

$$=-(|x|^2-\langle x,\xi\rangle^2)^j\left(\langle x,\xi\rangle+\frac{\alpha\sqrt{-1}}{\alpha+\sqrt{-1}}(|x|^2-\langle x,\xi\rangle^2)\right)^{\lambda+\mu+\frac{n+1}{2}-j}$$

を得る．他方，補題 4 により

$$\delta(x)=\sum_{j,k}c_{jk}\int_{|\xi|=1}\frac{(|x|^2-\langle x,\xi\rangle^2)^j}{\left(\langle x,\xi\rangle+\frac{\sqrt{-1}}{2}(|x|^2-\langle x,\xi\rangle^2+\sqrt{-1}\,0\right)^{n-k}}\omega(\xi)$$

となる c_{jk} が存在するから

$$T_\mu(x,\xi)=-\sum_{j,k}c_{jk}\left(-(\alpha+\sqrt{-1})^2\frac{d}{d\alpha}\right)^jL_{j+k-\mu-\frac{3}{2}n-1,\mu}(\alpha,x,\xi)$$

とおくことにより

$$\int\left(\int T_\mu(x-y,\xi)K_\mu(y,\xi)dy\right)\omega(\xi)=\delta(x)$$

を得る．しかも定義と第 2 章第 4 節命題 2.4.3 により S.S. $T_u(x,\xi)$ および S.S. $K_\mu(x,\xi)$ は何れも $\{(x,\xi;\ \sqrt{-1}d\langle x,\xi\rangle\infty)\in\sqrt{-1}S^*N|x=0\}=\{(x,\xi;\ \sqrt{-1}\langle\xi,dx\rangle\infty|x=0\}$ に含まれることは容易に判る．ここで μ を一つ固定して $T(x,\xi)=T_\mu(x,\xi)$, $K(x,\xi)=K_\mu(x,\xi)$ とおき，層準同型写像 $\Phi:\mathcal{C}_M\to\mathcal{B}_M/\mathcal{A}_N$ および $\Phi:\mathcal{B}_N/\mathcal{A}_N\to\mathcal{C}_M$ を各々

$$\Phi: u(x) \longmapsto \int K(x-y, \xi) u(y) dy$$

$$\Psi: u(x, \xi) \longmapsto \int T(x-y, \xi) u(y, \xi) dy \omega(\xi)$$

によって定義すれば，Φ, Ψ が求める条件を満たすことは明らかである．従って最初に述べた所から，microfunction の層 $\mathcal{C}_M$ が脆弱層であることが示された．　　(証終)

§8. 補　　足

この節では microfunction に関して，重要ではあるが，今までに論じ洩らした二，三の話題についての補いを与える．

まず，本章第1節定義 3.1.1 に関連して，次のような層 $\hat{\mathcal{C}}_M$ を導入できることを注意しよう．

定義 3.8.1. $\sqrt{-1}\,T^*M(=T^*_MX)$ 上の層 $\hat{\mathcal{C}}_M$ を，その芽を次のように定めることによって定義する：

$$\hat{\mathcal{C}}_{M,(x,\sqrt{-1}\xi)} = \begin{cases} \mathcal{C}_{M,(x,\sqrt{-1}\xi\infty)} & (\xi \neq 0) \\ \mathcal{B}_{M,x} & (\xi = 0). \end{cases}$$

注意 1. 本章第1節定義 3.1.1 で導入した $\widehat{\mathrm{S.S.}}u$ なる概念が，層 $\hat{\mathcal{C}}_M$ の元の台としての解釈を許すことは明らかであろう．

注意 2. 層 $\hat{\mathcal{C}}_M$ を用いることにより超函数の層と microfunction の層を同時に考察できて，思考の節約になることが多い．例えば，定理 3.1.5 と定理 3.1.6 を合わせれば次の定理を得る．

定理 3.8.1. p_1: $\sqrt{-1}\,T^*(M\times M)\underset{M\times M}{\times} M \to \sqrt{-1}\,T^*M$ を

$$p_1((x, \sqrt{-1}\xi_1), (x, \sqrt{-1}\xi_2)) = (x, \sqrt{-1}\xi_1),$$

p_2: $\sqrt{-1}\,T^*(M\times M)\underset{M\times M}{\times} M \to \sqrt{-1}\,T^*M$ を

$$p_2((x, \sqrt{-1}\xi_1), (x, \sqrt{-1}\xi_2)) = (x, \sqrt{-1}\xi_2),$$

q: $\sqrt{-1}\,T^*(M\times M)\underset{M\times M}{\times} M \to \sqrt{-1}\,T^*M$ を

$$q((x, \sqrt{-1}\xi_1), (x, \sqrt{-1}\xi_2)) = (x, \sqrt{-1}(\xi_1+\xi_2))$$

により各々定める．この時

$$q_!(p_1^{-1}\hat{\mathcal{C}}_M \times p_2^{-1}\hat{\mathcal{C}}_M) \longrightarrow \hat{\mathcal{C}}_M$$

なる層準同型写像が存在する.

問. 定理 3.2.1 を $\hat{\mathcal{C}}_M$ を用いて書き直すことを試みよ.

次の命題は $\hat{\mathcal{C}}_M$ と $\hat{\mathcal{C}}_{M\times R}$ との関係を与えて理論上重要である.

命題 3.8.1. M を実解析的多様体とする. $s:\mathcal{B}_M \longrightarrow \mathcal{B}_{M\times R}$ を $s(u(x))=$ $=u(x)\delta(t)$ により定める. また, 同じ s により $\hat{\mathcal{C}}_M \to \hat{\mathcal{C}}_{M\times R}$ なる写像を同様にして定める. この時次の2つの完全系列が存在する.

(3.8.1)　$0 \longrightarrow \mathcal{B}_M \xrightarrow{s} \mathcal{B}_{M\times R} \xrightarrow{t\cdot} \mathcal{B}_{M\times R} \longrightarrow 0$　(完全)

(3.8.2)　$0 \longrightarrow \hat{\mathcal{C}}_M \xrightarrow{s} \hat{\mathcal{C}}_{M\times R} \xrightarrow{t\cdot} \hat{\mathcal{C}}_{M\times R} \longrightarrow 0$　(完全)

但し, ここで $t\cdot$ は $t\in \boldsymbol{R}$ による掛け算作用素を表わす.

［証明］ まず(3.8.1)を証明しよう.

(i) s が単射的であることを証明しよう. 今 $u(x)\delta(t) \mapsto \int u(x)\delta(t)dt=u(x)$ なる写像を考えれば, これは明らかに s の左逆作用素になっている. 従って s は単射的である.

(ii) $t\cdot$ が全射的であることを示そう. 問題は局所的であるから, $M\subset \boldsymbol{R}^n$ と仮定しても一般性を失うことは無い. そうすれば, $u(x,t)\in \mathcal{B}_{M\times R}$ に対し $\boldsymbol{R}^n\times \boldsymbol{R}$ 内の有限個の開凸錐 Γ_j を $\varphi_j \in \mathcal{O}((M\times \boldsymbol{R})\times \sqrt{-1}\Gamma_j\cap\Omega)$ を選んで $u=\sum_j b(\varphi_j)$ と表わせる. ここで Ω は $M\times \boldsymbol{R}$ の複素近傍である. 又, 必要ならば Γ_j を適当に取り替えることにより, $\Gamma_j\cap(\boldsymbol{R}_n\times\{0\}=\phi$ と仮定しておいても構わない. 従って $\psi_j=\varphi_j/t$ は $((M\times \boldsymbol{R})\times\sqrt{-1}\Gamma_j)\cap\Omega$ での正則函数となる. よって $v(x,t)\in\mathcal{B}_{M\times R}$ を $\sum_j b(\psi_j)$ により定義することができる. 定義より明らかに $u(x,t)=tv(x,t)$ が成り立つ. 従って $t\cdot$ は全射的である.

(iii) $\mathrm{Ker}(t\cdot)=\mathrm{Im}\, s$ を証明しよう. $\mathrm{Im}\, s\subset \mathrm{Ker}(t\cdot)$ は明らかである. $\mathrm{Ker}(t\cdot)$ $\subset \mathrm{Im}\, s$ を証明しよう. 第1章§2で示したように, 任意の $u(x,t)\in\mathcal{B}_{M\times R}$ は $\sum_\varepsilon f_\varepsilon(x_1+\sqrt{-1}\,\varepsilon_1 0\cdots\cdots,\ x_n+\sqrt{-1}\,\varepsilon_n 0, t+\sqrt{-1}\,\varepsilon_{n+1}0)$ $(\varepsilon=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n,\varepsilon_{n+1})$ $\in\{-1,1\}^{n+1})$ と表わすことができる. 今 $u(x,t)\in\mathrm{Ker}(t\cdot)$ と仮定しよう. ここで記号を簡単にする為に $t=x_{n+1}$ と書き替えることとすれば, $x_{n+1}u(x,x_{n+1})$ $=0$ 故, $\Omega_k \underset{\mathrm{def}}{=} \{(x,x_{n+1})\in\Omega \mid$ 任意の $j(\neq k)$ に対して $\varepsilon_j \mathrm{Im}\, x_j>0\}$ での正則函数 $\varphi_{\hat{\varepsilon_k}}(x,x_{n+1}) \underset{\mathrm{def}}{=} \varphi_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{k-1},\varepsilon_{k+1},\cdots,\varepsilon_{n+1}}(x,x_{n+1})$ により

$x_{n+1}u(x,x_{n+1})=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}\varphi_{\hat{\varepsilon_k}}(x,x_{n+1})$ と表わすことができる. 従って $k\leqq n$ な

らば $\varphi_{\hat{\varepsilon}_k}$ の定義域において $x_{n+1}\neq 0$ であるから $\varphi_{\hat{\varepsilon}_k}\underset{\text{def}}{=}\dfrac{\psi_{\hat{\varepsilon}_k}}{x_{n+1}}$ は Ω_k での正則函数である．$k=n+1$ の時は，$\varphi_{\hat{\varepsilon}_{n+1}}=x_{n+1}\psi_{\hat{\varepsilon}_{n+1}}(x,x_{n+1})+\xi_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}(x)$ となるように，正則函数 $\psi_{\hat{\varepsilon}_{n+1}}$ と $\xi_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}$ を定める*)．この時，

$$u(x,x_{n+1})=\sum_\varepsilon f_\varepsilon=\sum_\varepsilon\Big(f_\varepsilon+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\varepsilon_k\psi_{\hat{\varepsilon}_k}\Big)=\sum_\varepsilon\frac{(-1)^{n+1}\varepsilon_{n+1}}{x_{n+1}}\xi_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}(x)=$$

$$=(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{x_{n+1}+\sqrt{-1}\,0}-\frac{1}{x_{n+1}+\sqrt{-1}\,0}\right)\sum_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n=\pm1}\xi_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n}(x)$$

を得る．従って $v(x)=(-1)^{n+1}2\pi\sqrt{-1}\sum_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n=\pm1}\xi_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}(x)$ と定めれば，$u(x,x_{n+1})=v(x)\delta(x_{n+1})$ となり，$u(x,x_{n+1})\in\mathrm{Im}\,s$ が証明されたことになる．

次に(3.8.2)を証明しよう．

(i) $t\cdot$ が全射的であることをまず確認しておこう．定理 3.7.1 により microfunction の層は脆弱層であるから，第2章定理 2.3.2 により(3.8.2)において $t\cdot$ が全射的であることは，(3.8.1)における $t\cdot$ の全射性に帰着される．

(ii) 次に $\mathrm{Ker}(t\cdot)=\mathrm{Im}\,s$ を示そう．今度も $\mathrm{Im}\,s\subset\mathrm{Ker}(t\cdot)$ は明らかである．従って $\mathrm{Ker}(t\cdot)\subset\mathrm{Im}\,s$ を証明しよう．最初に，$(x_0,0;\sqrt{-1}(\langle\xi_0,dx\rangle+dt)\infty)$ の近傍で考えよう．この時 $tu=0$ と云う仮定より，$\sqrt{-1}(\langle\xi_0,dx\rangle+dt)\infty\in U_j^\circ$ となる $U_j(\subset\sqrt{-1}S(M\times\boldsymbol{R}))$ の錐状近傍 $\Gamma_j(j=1,\cdots,j_0)$ と Γ_j での正則函数 φ_j を見つけて $tu=\sum_{j=1}^{j_0}b_{\Gamma_j}(\varphi_j)$ と表わすことができる．次に Γ_j において $\varphi_j(x,t)=t\psi_j(x,t)+\xi_j(x)$ となる $\psi_j(x,t)$，$\xi_j(x)$ を用いて*)

$$\tilde{u}(x,t)=u(x,t)-\sum_{j=1}^{j_0}b_{\Gamma_j}(\psi_j)-\frac{1}{t-\sqrt{-1}\,0}\sum_{j=1}^{j_0}b_{\Gamma_j}(\xi_j)$$

と定めれば，明らかに，考えている点の近傍では $\tilde{u}(x,t)=u(x,t)$ が成立する．しかも超函数として $t\tilde{u}(x,t)=0$ が成り立つことは ψ_j,ξ_j の選び方より明らかである．従って(3.8.1)の完全性により，$\tilde{u}(x,t)=v(x)\delta(t)$ となる超函数 $v(x)$ を見出すことができる．従って，考えている点の近傍では，$u=\mathrm{sp}(v(x)\delta(t))$ が成り立ち $\mathrm{Ker}(t\cdot)\subset\mathrm{Im}\,s$ が証明されたことになる．$(x_0,0:\sqrt{-1}\langle\xi_0,dx\rangle\infty)$ の近傍で問題を考える時は，$x\mapsto x+at$ なる座標変換により，以前の場合に帰着させればよい．

(iii) 最後に s が単射的であることを証明しよう．$\hat{\mathcal{C}}_M$ の定義により，二つの

---

*) 今，$\psi_{\hat{\varepsilon}_{n+1}}$ と $\xi_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}$ は大域的に作らねばならないからその存在は自明ではない．読者自ら証明を与えられたい．

場合に分けて考えることとする.

まず $0\to\mathcal{B}_{M,x}\xrightarrow{s}\mathcal{C}_{M,(x,0;\sqrt{-1}dt\infty)}$ が完全系列であることを証明しよう.

まず $c\neq0$ なる限り $\delta(ct)=\frac{1}{|c|}\delta(t)$ が成り立つから, 或る $\xi_0\neq0$ に対し, $(x,0;\sqrt{-1}(\langle\xi_0,dx\rangle+dt)\infty)$ の近傍で $\mathrm{sp}(u(x)\delta(t))=0$ であれば, 任意の ξ に対し, $(x,0;\sqrt{-1}(\langle\xi,dx\rangle+dt)\infty)$ の近傍において $\mathrm{sp}(u(x)\delta(t))=0$ が成立する. 一方 $x\mapsto x+at$ となる座標変換により, $\mathrm{sp}(u(x)\delta(t))=0$ が到る所で成立する. 従って, $u(x)\delta(t)$ は実解析函数であってその台が $\{t=0\}$ に限られることになる. 故に $u(x)\delta(t)=0$ となり, (3.8.1)における s の単射性により $u(x)=0$ を得る.

最後に

$$0\longrightarrow\mathcal{C}_{M,(x;\sqrt{-1}\langle\xi,dx\rangle)\infty)}\xrightarrow{s}\mathcal{C}_{M\times\mathbf{R},(x,0;\sqrt{-1}(\langle\xi,dx\rangle+\tau dt)\infty)}$$

が完全系列であることを示そう. 再び $x\mapsto x+at$ という座標変換を考えることにより, $u(x)\delta(t)=0$ が $\tau=0$ 迄こめて成立するから,

$$u(x)=\int u(x)\delta(t)dt$$

により, s の単射性を得る.

以上により証明が完成した.　(証終)

次に正則パラメタを持つ超函数の概念を導入しよう. まずこの為に不可欠な“複素共軛”の概念を思い出しておこう.

定義 3.8.2. T を複素多様体とする時, 複素多様体 $\overline{T}$ が T の**複素共軛** (complex conjugate) であるとは, 位相空間としての同相写像 α: $T\to\overline{T}$ であって $f\in\mathcal{O}_{\overline{T}}$ であるのは $\overline{f\circ\alpha}\in\mathcal{O}_T$ である時, かつその時に限るようなものが存在することを謂う*).

注意. (1) $\overline{T}$ が T の複素共軛であれば, T は $\overline{T}$ の複素共軛である.

(2) $\overline{T}$ を T の複素共軛とする時, $T\ni\tau\mapsto(\tau,\alpha(\tau))\in T\times\overline{T}$ によって T を $T\times\overline{T}$ に埋め込むことができるのは明らかである. ここで複素多様体 T を実解析的多様体と考えたものを T_{real} と記せば, $T\times\overline{T}$ は T_{real} の複素化になっている. 実際, 複素多様体としての接空間 $T(T)$ と実解析的多様体としての接空間 $T(T_{\mathrm{real}})$ を次のように同一視することができる:

---

*) ここで通常通り $\overline{f\circ\alpha}(z)=\overline{f(\alpha(z))}$ と定める.

$X_0 \in T(T)$ と $X \in T(T_{\mathrm{real}})$ が任意の $f \in \mathcal{O}_T$ に対してそれ等が $Xf = X_0 f$ を満足する時，かつその時に限り，X と X_0 を同一視する．

この同一視を局所座標系を用いて書き下せば，次のようになる．

$(\tau_1, \cdots, \tau_l)$ を T の複素局所座標として，$\tau_j = t_j + \sqrt{-1}\, s_j$ $(1 \leqq j \leqq l)$ とする．この時，$f \in \mathcal{O}_T$ に対して

$$\frac{\partial}{\partial t_j} f(\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau_j} f(\tau) \frac{\partial \tau_j}{\partial t_j} = \frac{\partial}{\partial \tau_j} f(\tau)$$

および

$$\frac{\partial}{\partial s_j} f(\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau_j} f(\tau) \frac{\partial \tau_j}{\partial s_j} = \sqrt{-1}\, \frac{\partial}{\partial \tau_j} f(\tau)$$

が成り立つから

$$\frac{\partial}{\partial \tau_j} \longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial t_j}, \quad \sqrt{-1}\, \frac{\partial}{\partial \tau_j} \longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial s_j} (1 \leqq j \leqq l)$$

と対応させればよい．

この同一視に対応してそれ等の双対である $T^*(T)$ と $T^*(T_{\mathrm{real}})$ の同一視を行うこともできる．それを局所座標を用いて表わせば，

$$d\tau_j \longleftrightarrow dt_j, \qquad -\sqrt{-1}\, d\tau_j \longleftrightarrow ds_j$$

という対応となる．以下では断りなくこれらの同一視を行う．

さて M を実解析的多様体，$X, \overline{X}$ を M の複素化であって互いに複素共軛になっているものする．更に対応する $\alpha: X \to \overline{X}$ を M に制限した時，恒等写像であると仮定する．例えば $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{R}^n$，$X = \overline{X} = \boldsymbol{C}^n$ の時，$\alpha(z_1, \cdots, z_n) = (\bar{z}_1, \cdots, \bar{z}_n)$ とすればよい．

この時，$f(\bar{z}) \in \mathcal{O}_{\overline{X}}$ に $\bar{f}(z) = \overline{f(\bar{z})} \in \mathcal{O}_X$ を対応させることにより層準同型写像 $\alpha^{-1}\mathcal{O}_{\overline{X}} \to \mathcal{O}_X$ が得られる．従ってこれから更に $\alpha^{-1}\mathcal{H}_M^n(\mathcal{O}_{\overline{X}}) \to \mathcal{H}_M^n(\mathcal{O}_X)$ なる層準同型写像が惹き起こされる．明らかにこれは同型写像になっている．以下，この情況で問題を考える．

定義 3.8.3. 超函数 $u(x) = \sum_j b(f_j(z)) \in \mathcal{B}_M$ に対して $\overline{u(x)} = \sum_j b(\bar{f}_j(\alpha(z))) \in \mathcal{B}_M$ を $u(x)$ の複素共軛と呼ぶ．$u(x) = \overline{u(x)}$ となる超函数を**実数値超函数**と謂う．

例 3.8.1. δ-函数は実数値超函数である．

［証明］ $\delta(x_1, \cdots, x_n) = \dfrac{1}{(-2\pi\sqrt{-1}\,)^n} \sum_\varepsilon \dfrac{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n}{(x_1 + \sqrt{-1}\, \varepsilon_1 0) \cdots (x_n + \sqrt{-1}\, \varepsilon_n 0)}$ であるから定義により

$$\overline{\delta(x_1,\cdots,x_n)}=\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1}\,)^n}\sum_\varepsilon\frac{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}{(x_1-\sqrt{-1}\,\varepsilon_1 0)\cdots(x_n-\sqrt{-1}\,\varepsilon_n 0)}$$

が成立する．ここで $\varepsilon_i\mapsto -\varepsilon_i$ と置き換えれば

$$\overline{\delta(x_1,\cdots,x_n)}=\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\sum_\varepsilon\frac{(-1)^n\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}{(x_1+\sqrt{-1}\,\varepsilon_1 0)\cdots(x_n+\sqrt{-1}\,\varepsilon_n 0)}=\delta(x_1,\ \cdots,\ x_n)$$

を得る．（証終）

例 3.8.2. $\overline{(x+i0)^\lambda}=(x-\sqrt{-1}\,0)^{\bar\lambda}$ $(\lambda\in\boldsymbol{C})$

なお，$\overline{X}$ を X の複素共軛とする時，α: $X\to\overline{X}$ が自然に対蹠点写像 a を $\sqrt{-1}SM$ および $\sqrt{-1}S^*M$ 上に惹き起こすことは明らかである．又，

$$\mathrm{S.S.}\bar u=(\mathrm{S.S.}u)^a=\{(x,\ \sqrt{-1}\xi\infty)\in\sqrt{-1}S^*M\,|\,(x,\ \sqrt{-1}\xi\infty)\in\mathrm{S.S.}u\}$$

の成り立つことも明らかであろう．

なお，microfunction u に対しても，上の状況の下で同様にしてその複素共軛を定義できる．

定義 3.8.4. M を n 次元実解析的多様体，T を l 次元複素多様体とする．$M\times T$ を $(n+2l)$ 次元実解析的多様体と考えてその上の超函数(又は，microfunction) $u(x,\tau,\bar\tau)$ が**コーシー・リーマン** (Cauchy-Riemann) **の微分方程式** $\dfrac{\partial u}{\partial\bar\tau_j}=0$ $(1\leqq j\leqq l)$ を満たす時，u は τ に正則に依存する，又は τ を**正則パラメタ**として持つ，と謂う*).

注意. $\sqrt{-1}S^*(M\times T)=\{(x,\tau,\sqrt{-1}(\langle\xi,dx\rangle+\langle\zeta,d\tau\rangle+\langle\bar\zeta,d\bar\tau\rangle)\infty\}$ であり，又，$T\times\sqrt{-1}S^*M=\{(x,\tau;\ \sqrt{-1}\langle\xi,dx\rangle\infty)\}$ であるから，$T\times\sqrt{-1}S^*M\subset\sqrt{-1}S^*(M\times T)$ と考えることができる．微分作用素 $\partial/\partial\bar\tau_j$ の主要素象は $\bar\zeta_j$ であるから定理 3.4.4 によって $\mathrm{S.S.}\,u\subset\{\bar\zeta_1=\cdots=\bar\zeta_l=0\}\subset T\times\sqrt{-1}S^*M$ となることが判る．

以下正則パラメタ τ を持つ超函数 $u(x,\tau)$ を考察しよう．以下記述を簡単とする為に $T\subset\boldsymbol{C}$ と仮定するが，一般に $T\subset\boldsymbol{C}^l$ としても議論は変わらない．

命題 3.8.2. $T\subset\boldsymbol{C}$ とする．$u(x,\tau)$ を正則パラメタを持つ $M\times T$ 上の超函数とする．今，M の複素化を X, T の複素化を $T\times\overline{T}$ とする時，X の開集合 D_j と T の開集合 U_j を選んで $u(x,\tau)=\sum_j b_{D_j\times U_j}(f_j(z,\tau))$ と表わすことができる．

---

*) $\dfrac{\partial u}{\partial\bar\tau}=0$ であるから，この時 $u=u(x,\tau)$ と記すこともある．

［証明］　まず $u(x,\tau)=\sum_j b(f_j(z,\tau,\bar{\tau}))$ と表わそう．この時，

$$\frac{\partial u}{\partial\bar{\tau}}=\sum_j b\left(\frac{\partial}{\partial\bar{\tau}}f_j(z,\tau,\bar{\tau})\right)=0$$

であるから $\frac{\partial}{\partial\bar{\tau}}f_j$ はコバウンダリーになっている．即ち，

$$\frac{\partial}{\partial\bar{\tau}}f_j=\sum_k g_{jk},\quad \text{但し}\ g_{jk}=-g_{kj}$$

と表わすことができる．ここでは τ と $\bar{\tau}$ は独立な複素変数故，命題 3.2.1 の証明中の補題の証明と同様にして $g_{jk}=\frac{\partial}{\partial\bar{\tau}}h_{jk}\ (j>k)$ なる $h_{jk}(z,\tau,\bar{\tau})\ (j>k)$ の存在が証明される．また $j<k$ に対しては $h_{jk}=-h_{kj}$ により，また，$j=k$ の時は $h_{jk}=0$ と h_{jk} を定める．この時，$F_j(z,\tau,\bar{\tau})=f_j-\sum_k h_{jk}$ とおけば $\frac{\partial}{\partial\bar{\tau}}F_j(z,\tau,\bar{\tau})=0$ が成り立つ．従って $F_j(z,\tau,\bar{\tau})=F_j(z,\tau)$ である．しかも $\sum_j b(F_j(z,\tau))=\sum_j b(f_j-\sum_k h_{jk})=\sum_j b(f_j)=u(x,\tau)$ となる．　　（証終）

命題 3.8.3.　$u(x,\tau)$ が τ について正則に依存する超函数とする．もし，$u(x,\tau_0)=0$ が成り立てば，τ について正則に依存する超函数 $v(x,\tau)$ であって $u(x,\tau)=(\tau-\tau_0)v(x,\tau)$ となるものが唯一つ存在する．

［証明］　$\tau_0=0\in \boldsymbol{C}$ としても一般性を失うことはない．前命題に言う $f_j(z,\tau)$ を用いて $u(x,\tau)=\sum_j b(f_j(z,\tau))$ と表わせば，$u(x,0)=\sum_j b(f_j(z,0))=0$ となる．他方，$f_j(z,\tau)-f_j(z,0)=\tau h_j(z,\tau)$ となる正則函数 $h_j(z,\tau)$ が存在するから $u(x,\tau)=\sum_j b(f_j(z,\tau)-f_j(z,0))=\tau\sum_j b(h_j(z,\tau))$ となる．従って $v(x,\tau)=\sum_j b(h_j(z,\tau))$ とおけばよい．次に一意性を示そう．今，$\tau\cdot u(x,\tau)=0$ と仮定すれば $\tau\neq0$ ならば $u(x,\tau)=0$ であるから，特に $\mathrm{Supp}\,u(x,\tau)\subset\{\mathrm{Re}\tau\geqq0\}$ である．$d\mathrm{Re}\tau((x,0))\neq0$ であり，更に本章第4節定理 3.4.4 により $((x,0);\sqrt{-1}\,d\mathrm{Re}\tau(x,0)\infty)\notin \mathrm{S.S.}u(x,\tau)$ が成り立つ．従って本章第5節命題 3.5.2 により $u(x,\tau)=0$ を得る．　　（証終）

命題 3.8.4.（正則パラメタに関する Cauchy の積分定理）　$\gamma\subset T\ (\subset \boldsymbol{C})$ を Jondan 閉曲線とする．この時，正則パラメタ τ を持つ超函数 $u(u,\tau)$ に対して $\int_\gamma u(x,\tau)d\tau=0$ が成立する*)．

［証明］　命題 3.8.2 に言う $f_j(z,\tau)$ を用いて $u(x,\tau)=\sum_j b(f_j(z,\tau))$ と表わせ

*)　ここで積分の意味は“まず $u(x,\tau)$ を γ に制限して次に線積分 $\oint_\gamma d\tau$ を実行する”の意である．

ば，正則函数に対する Cauchy の積分定理により容易に証明される．（証終）

命題 3.8.5. (正則パラメタに関する Cauchy の積分公式) $u(x,\tau)$ を正則パラメタ τ を持つ超函数とする時

$$u(x,\tau)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_\gamma u(x,\zeta)\frac{1}{\zeta-\tau}d\zeta$$

が成り立つ．ここで γ は τ の回りを反時計回りに一周する閉曲線である．

［証明］ 命題 3.8.3 により

$$u(x,\tau+w)-u(x,w)=\tau v(x,w,\overline{w},\tau)$$

を満たし，しかも τ に正則に依存する超函数 v が存在する．両辺を $\overline{w}$ で微分すると $0=\tau\frac{\partial}{\partial\overline{w}}v(x,w,\overline{w},\tau)$ となり命題 3.8.3 の一意性の主張により $\frac{\partial v}{\partial\overline{w}}=0$ が成り立つ．従って $v=v(x,w,\tau)$ を得る．故に

$$u(x,\zeta)-u(x,\tau)=u(x,(\zeta-\tau)+\tau)-u(x,\tau)=(\zeta-\tau)v(x,\zeta-\tau,\tau)$$

を得る．従って命題 3.8.4 を合わせ用いることにより

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint u(x,\zeta)\frac{1}{\zeta-\tau}d\zeta=u(x,\tau)+\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint v(x,\zeta-\tau,\tau)d\zeta=u(x,\tau)$$

を得る．（証終）

さて Cauchy の積分公式に引き続いて，正則パラメタを持つ超函数および microfunction に対してそのパラメタに関する解析接続の一意性を証明することを次の目標とする．その為に，多変数函数論で有名な，柱状領域の正則包に関する Bochner の定理の局所化である次の命題を証明しよう．これは，応用の広い定理である．

命題 3.8.6. (小松 [2]，S-K-K[1] Chapter I §3.1) $0<\varepsilon<1$ に対し，

$$G_\varepsilon \underset{\text{def}}{=} \{(x_1+\sqrt{-1}y_1,\ x_2+\sqrt{-1}y_2)\in \boldsymbol{C}^2 \mid 0\leqq y_1,\ 0\leqq y_2,\ y_1+y_2<1,$$
$$\varepsilon(x_1{}^2+x_2{}^2)+(y_1+y_2)-\varepsilon(y_1{}^2+y_2{}^2)<1-\varepsilon\}$$

および

$$F_\varepsilon \underset{\text{def}}{=} G_\varepsilon\cap\{y_1=0 \text{ 又は } y_2=0\}$$

によって $G_\varepsilon, F_\varepsilon(\subset \boldsymbol{C}^2)$ を定義する．また U' を F_ε を含む開集合とし，

$$U=\{(x_1+\sqrt{-1}y_1,\ x_2+\sqrt{-1}y_2)\in U' \mid y_1<0 \text{ 又は } y_2<0\}$$

と定める．この時任意の開集合 $W\subset \boldsymbol{C}^n$ に対して

$$\mathcal{O}_{C^2\times W}((U\cup G_\varepsilon)\times W)\longrightarrow \mathcal{O}_{C^2\times W}(U\times W)$$

は全射的である．

［証明］　相対コホモロジー群に関する完全系列により $H^1_{G_\varepsilon\times W}(\boldsymbol{C}^2\times W, \mathcal{O})=0$ を示せば十分である．今 $\varphi(z_1, z_2)=z_1+z_2+\sqrt{-1}\,\varepsilon(z_1{}^2+z_2{}^2)$ と定めれば $G_\varepsilon=\{(z_1, z_2)\mid \mathrm{Im}z_1\geqq 0,\ \mathrm{Im}z_2\geqq 0,\ \mathrm{Im}(z_1+z_2)<1, \mathrm{Im}\varphi<1-\varepsilon\}$ となる．ここで

$$K^1_\varepsilon=\{(z_1, z_2)\in\boldsymbol{C}^2\mid \mathrm{Im}z_1\geqq 0,\ \ \mathrm{Im}z_2\geqq 0,\ \ \mathrm{Im}(z_1+z_2)\leqq 1,\ \ \mathrm{Im}\varphi\leqq 1-\varepsilon\}$$

$$K^2_\varepsilon=\{(z_1, z_2)\in\boldsymbol{C}^2\mid \mathrm{Im}z_1\geqq 0,\ \ \mathrm{Im}z_2\geqq 0,\ \ \mathrm{Im}(z_1+z_2)\leqq 1,\ \ \mathrm{Im}\varphi=1-\varepsilon\}$$

と定めれば $G_\varepsilon=K^1_\varepsilon-K^2_\varepsilon$ となる．実際，$G_\varepsilon\subset K^1_\varepsilon-K^2_\varepsilon$ は明らかであるから，$K^1_\varepsilon-K^2_\varepsilon\subset G_\varepsilon$ を示せば十分である．その為には，“$\mathrm{Im}z_1\geqq 0$, $\mathrm{Im}z_2\geqq 0$, かつ $\mathrm{Im}\varphi<1-\varepsilon$ ならば $\mathrm{Im}(z_1+z_2)\neq 1$” が成り立つことを言えばよい．今，$\mathrm{Im}z_1\geqq 0$, $\mathrm{Im}z_2\geqq 0$ かつ $\mathrm{Im}\varphi<1-\varepsilon$ とすれば $\mathrm{Im}(z_1+z_2)-\varepsilon(\mathrm{Im}(z_1+z_2))^2\leqq \mathrm{Im}\varphi<1-\varepsilon$ が成り立ち $\mathrm{Im}(z_1+z_2)=1$ とすれば $1-\varepsilon<1-\varepsilon$ を得て矛盾である．従って上の主張が確かめられた．

明らかに $K^1_\varepsilon, K^2_\varepsilon$ はコンパクトな解析的多面体であるから，第2章命題2.3.1により $H^1_{G_\varepsilon\times W}(\boldsymbol{C}^2\times W, \mathcal{O})=0$ を得る．　　　　　　　　　　(証終)

命題 3.8.7. $0<\varepsilon<\dfrac{1}{2}$ とする．ここで

$$F_1=\left\{(x_1+\sqrt{-1}y_1,\, x_2+\sqrt{-1}y_2)\in\boldsymbol{C}^2\mid y_1=0,\, 0\leqq y_2<1,\ x_1{}^2+x_2{}^2<4\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right\},$$

$$F_2=\left\{(x_1+\sqrt{-1}y_1,\, x_2+\sqrt{-1}y_2)\in\boldsymbol{C}^2\mid y_2=0,\, 0\leqq y_1<1,\ x_1{}^2+x_2{}^2<4\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right\},$$

$$G_1=\left\{(x_1+\sqrt{-1}y_1,\, x_2+\sqrt{-1}y_2)\in\boldsymbol{C}^2\mid y_1\geqq 0,\, y_2\geqq 0,\, y_2+(1-2\varepsilon)(y_1-1)<0,\right.$$
$$\left. x_1{}^2+x_2{}^2<\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right\},$$

$$G_2=\left\{(x_1+\sqrt{-1}y_1,\, x_2+\sqrt{-1}y_2)\in\boldsymbol{C}^2\mid y_1\geqq 0,\, y_2\geqq 0,\, y_1+(1-2\varepsilon)(y_2-1)<0,\right.$$
$$\left. x_1{}^2+x_2{}^2<\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right\}$$

により F_1, F_2, G_1, G_2 を定め，$F=F_1\cup F_2$, $G=G_1\cup G_2$ とおく．U' を F の近傍として $U=U'\cap\{y_1<0$ 又は $y_2<0\}$ と定める時，任意の開集合 $W\subset\boldsymbol{C}^N$ に対して

$$\mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^2\times W}((U\cup G)\times W)\longrightarrow\mathcal{O}_{\boldsymbol{C}^2\times W}(U\times W)$$

は全射的である．

［証明］　$\alpha=(\alpha_1, \alpha_2)\in\boldsymbol{R}^2$ に対して $G_{\varepsilon,\alpha}, F_{\varepsilon,\alpha}$ および $\tilde{G}_{\varepsilon,\alpha}$ を各々

$G_{\varepsilon,\alpha}=\{(z_1, z_2)\in\boldsymbol{C}^2\mid y_1\geqq 0,\ \ y_2\geqq 0,\ \ y_1+y_2<1$ かつ $\varepsilon((x_1-\alpha_1)^2+(x_2-\alpha_2)^2)+$

$+(y_1+y_2)-\varepsilon(y_1{}^2+y_2{}^2)<1-\varepsilon\}$, $F_{\varepsilon,\alpha}=G_{\varepsilon,\alpha}\cap\{y_1=0$ 又は $y_2=0\}$ および $\tilde{G}_{\varepsilon,\alpha}=G_{\varepsilon,\alpha}\cap\{x_1=\alpha_1, x_2=\alpha_2\}$ により定める．容易に確め得るように，$\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2<(1-\varepsilon)/\varepsilon$ ならば $F_{\varepsilon,\alpha}\subset F$ である．従って U' が F の近傍ならば $F_{\varepsilon,\alpha}$ の近傍ともなるから命題 3.8.6 により U 上の正則函数は $U\cup G_{\varepsilon,\alpha}$ の正則函数に拡張される．従って，特に，$U\cup\tilde{G}_{\varepsilon,\alpha}$にまで拡張される．ここで $\tilde{G}\underset{\text{def}}{=}\bigcup_{\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2<\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}\tilde{G}_{\varepsilon,\alpha}$ とおけば

$$\tilde{G}=\{(z_1,z_2)\in C^2\,|\,x_1{}^2+x_2{}^2<\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon},\ y_1\geqq 0,\ y_2\geqq 0, (y_1+y_2)-\varepsilon(y_1{}^2+y_2{}^2)<1-\varepsilon\}$$

となる．勿論 U 上の正則函数は $U\cup\tilde{G}$ にまで拡張される．ここで $G\subset\tilde{G}$ であるから特に $U\cup G$ にまで拡張されることになる．即ち，

$$\mathcal{O}_{C^2\times W}((U\cup G)\times W)\longrightarrow\mathcal{O}_{C^2\times W}(U\times W)$$

が全射的であることが判った．　(証終)

この命題の容易な系として得られる，次の事実は応用上極めて重要である．

系 1. $\{z=(z_1,\cdots,z_n)\in C^n\,|\,|\mathrm{Re}z_j|<a\ (j=1,\cdots,n)\ 0<\mathrm{Im}z_1<b,\ \mathrm{Im}z_2=\cdots=\mathrm{Im}z_n=0\}$ の近傍での正則函数 $f(z)$ は適当な $\varepsilon>0$ に対し $\{z\in C^n\,|\,|\mathrm{Re}z_j|<\varepsilon,\ \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\sum_{j=2}^{n}|\mathrm{Im}z_j|^2}<\mathrm{Im}z_1<\varepsilon\}$ で正則な函数に拡張される．

注意. 系 1 は $f(z)$ が $0+\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x_1}0$ の近傍で $\tilde{\mathscr{A}}$ の元を定めることを意味している．従って，この系により，正則函数の境界値を考える際，虚から実に近付く近付き方を高次の無限小を無視して考えてよいことが保証される．これが microfunction の層が，高次のジェットを用いる等と云う難しいことはなく $\sqrt{-1}S^*M$ という簡単な幾何学的構造の多様体の上に構成できた，陰の理由であろう．もっとも，このような理由付けは後から為されたもので，佐藤先生が microfunction の理論を形成された時，先生はこの系 1 (に該る事実)は自明，として議論を進められたのであった．天才のみの持つ直観力の確かさと言うべきであろう．

系 1 の自明な系として得られる次の事実も，屢々極めて有用である．

系 2. M を R^n の開集合とし，ξ_0 を 0 でない n 次元実ベクトルとする．この時，M 上の実解析函数 $f(x)$ と M の点 x_0 に対し，$0<t\ll 1$, $|x-x_0|\ll 1$ なる限り $f(x+\sqrt{-1}t\xi_0)\neq 0$ が成り立つならば，$\{z\in C^n-R^n\,|\,f(z)\neq 0\}$ は $x_0+\sqrt{-1}\xi_0 0$ の錐状近傍である．

以上の結果を用いて解析性の伝播に関する次の命題を証明しよう.

命題 3.8.8. D を $\boldsymbol{C}$ の連結開集合とし, Ω を $\{0\}\times D$ を含む $\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{C}$ の開集合とする. $u(x,\tau)$ を Ω 上で定義された τ を正則パラメタとして持つ超函数であって適当な固有的に凸な閉集合 $\Gamma(\subset S^{n-1})$ に対し $\text{S.S.}u\cap\{x=0\}\subset\Omega\times\sqrt{-1}\Gamma$ が成り立つものとする. この時 $u(x,\tau)$ が $x=0$, $\tau=\tau_0(\in D)$ の近傍で実解析函数ならば $u(x,\tau)$ は $\{0\}\times D$ の近傍で実解析的である.

［証明］ Γ は固有的に凸な閉集合であるから適当に座標変換を行えば, $\Gamma\subset V\underset{\text{def}}{=}\{(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in S^{n-1}\,|\,\xi_1>|\xi_2|+\cdots+|\xi_n|\}$ としても一般性を失わない. $D\times\{0\}\subset\Omega$ であるから適当な $\alpha(<1)$ と ε に対して $\{\tau\,|\,|\text{Re}\tau|\leqq\alpha,\ |\text{Im}\tau|\leqq\alpha\}\times\{x\in\boldsymbol{R}^n\,|\,|x|\leqq\varepsilon\}\subset\Omega$ となる. よって最初から $\bar{D}\times\{x\in\boldsymbol{R}^n\,|\,|x|\leqq1\}\subset\Omega$ と仮定しても構わない. $\text{S.S.}u\cap\{x=0\}\subset\Omega\times\sqrt{-1}V$ であるから第2章定理 2.3.4 により $\tilde{D}=\{(z,\tau)\in\boldsymbol{C}^n\times\boldsymbol{C}\,|\,\tau\in D,\ |z|\ll1,\ \text{かつ}\ \text{Im}z_1>|\text{Im}z_2|,\cdots,|\text{Im}z_n|\}$ での正則函数 $f(z,\tau)$ により, $u=b_{\tilde{D}}(f(z,\tau))$ と表わせる. この情況の下で次の補題1が成立する.

補題 1. $u(x,\tau)=b(f(z,\tau))$ が $|\tau|<1$ で定義されていて $\text{Im}\tau>0$ では実解析函数を定めるとする. この時 $\varepsilon>0$ が存在して $u(x,\tau)$ は $|\tau|<\varepsilon$ で実解析的である.

補題1の証明は後回しにして補題1から命題 3.8.8 を証明しよう. 命題 3.8.8 を示すには

(A) $b(f(z,\tau))$ が $|\tau|<1$ で定義されていて, しかも $\tau=0$ の近傍で実解析的ならば $|\tau|<1$ で実解析的

を言えば十分である.

又, (A) を示す為には

(B) $b(f(z,\tau))$ が $|\tau|<a(<1)$ で実解析的ならば或る $\varepsilon>0$ が存在して $|\tau|<a+\varepsilon$ でも実解析的

を言えば十分であることは明らかである. そこで補題1から (B) を導こう. $|\tau_0|=a$ となる τ_0 について $b(f(z,\tau))$ は $|\tau|<a$ で実解析的だから補題1と一次分数変換を用いることにより, 或る $\varepsilon_{\tau_0}>0$ が存在して $U_{\tau_0}=\{\tau\,|\,|\tau-\tau_0|<\varepsilon_{\tau_0}\}$ で $b(f(z,\tau))$ は実解析的であるとしても構わない. $\{\tau\,|\,|\tau|=a\}$ はコンパクトだから $\{\tau\,|\,|\tau|=a\}\subset\bigcup_{i=1}^{l}U_{\tau_i}$ となる有限個の $\tau_i(1\leqq i\leqq l)$ が存在する. 従

って $\varepsilon=\min_i \varepsilon_{\tau_i}$ とおけば $b(f(z,\tau))$ は $|\tau|<a+\varepsilon$ で実解析的になる．故に補題1を証明すれば命題の証明は完結する．

補題1の証明を与えよう．

$f(z,\tau)$ は $|\mathrm{Re}\tau|<1$, $|\mathrm{Im}\tau|<1$, $|\mathrm{Re}z_j|<\varepsilon$, $|\mathrm{Im}z_j|<\varepsilon$ $(1\leqq j\leqq n)$ かつ $\mathrm{Im}z_1>|\mathrm{Im}z_2|, \cdots, |\mathrm{Im}z_n|$ なる領域で定義された正則函数としてよい．

さて $\mathrm{Im}\tau>0$ の時，境界値 $b(f(z,\tau))$ が実解析的であるから，$\mathrm{Im}z_1\to 0$ (従って $|\mathrm{Im}z_j|\to 0$ $(j=2,\cdots,n)$) なる極限をとっても $f(z,\tau)$ は正則である．従って $\mathrm{Im}\tau>\delta>0$ ならば，或る $\varepsilon'>0$ に対して $\mathrm{Im}z_1>-\varepsilon'$, $|\mathrm{Im}z_j|<\varepsilon'$ $(j=2,\cdots,n)$ なる限り $f(z,\tau)$ は正則である．ここで命題 3.8.7 を用いれば十分小さい δ, $\varepsilon>0$ に対し，或る $\varepsilon''>0$ が存在して $|\mathrm{Im}\tau|<\varepsilon''$，かつ $|\mathrm{Im}z_j|<\varepsilon''$ $(j=1,\cdots,n)$ ならば $f(z,\tau)$ は正則となる．従って特に $\mathrm{Im}z=0$, $|\mathrm{Im}\tau|<\varepsilon''$ のところで実解析的，即ち，$u(x,\tau)=b(f(z,\tau))$ は $|\tau|<\varepsilon''$ で実解析的となる．以上により，補題1が証明され，従って命題 3.8.8 の証明が完結したこととなる．

(証終)

以上により次の定理を得る．

定理 3.8.1. (1)　$u(x,\tau)$ を τ に正則に依存する microfunction とする．$u(x,\tau)$ が $\tilde{D}_{(x_0,\xi_0)}=\{(x_0,\tau;\sqrt{-1}<\xi_0,dx>\infty)\mid \tau\in D\subset \boldsymbol{C}\}$ で定義されていてしかも D が連結とする．この時 $(x_0,\tau_0;\sqrt{-1}\langle\xi_0,dx\rangle\infty)$ の近傍で $u(x,\tau)=0$ ならば $\tilde{D}_{(x_0,\xi_0)}$ の近傍で $u(x,\tau)=0$ となる．

(2) (解析接続の一意性)　$u(x,\tau)$ を $\{x_0\}\times D$ の近傍で定義された正則パラメタ τ を持つ超函数とする．もし $(x_0,\tau_0)(\tau_0\in D)$ の近傍で $u(\tau,x)=0$ ならば $\{x_0\}\times D$ の近傍で $u(x,\tau)=0$ である．

［証明］　(2)は命題 3.8.8 と正則函数に対する解析接続の一意性定理により明らかである．(1)を示そう．$u(x,\tau)$ は $\{(x_0,\sqrt{-1}\xi_0\infty)\}\times D$ の近傍で定義されているから $(x_0,\sqrt{-1}\xi_0\infty)$ を含む開集合 V が存在して $V\times D$ で $u(x,\tau)$ は定義されておりしかも $V\times\{\tau_0\}$ の近傍で $u=0$ が成り立っているとしても構わない．更に簡単の為 $V=U\times\sqrt{-1}\,W$ (U, W は凸) と仮定しておく．さて microfunction の層の脆弱性により $\sqrt{-1}S^*M$ 上の超局所作用素の層 $\mathscr{L}_M$ もまた脆弱層であることに注意しよう．このことから $(x_0,\sqrt{-1}\xi_0\infty)$ の近傍で $K=1$, かつ $\mathrm{Supp}K\subset V$ となる超局所作用素 K の存在が判る．今，この K に対

し $v=Ku$ と定め, $\mathcal{B}\xrightarrow{\mathrm{sp}}\pi_*\mathcal{C}\longrightarrow 0$ なる完全系列によりその存在が保証される $v=\mathrm{sp}(g)$ なる超函数 g を考えよう．すると $\mathrm{sp}\left(\dfrac{\partial g}{\partial \tau}\right)=\dfrac{\partial v}{\partial \tau}=0$ が成り立つから $\dfrac{\partial g}{\partial \tau}=h$ は $U\times D$ で実解析的である．今 U に含まれる凸コンパクト集合 L と D 内の任意の凸コンパクト集合 L' に対し $\dfrac{\partial g_0}{\partial \tau}=h$ が $L\times L'$ 上で成立するような実解析函数 g_0 が存在することが定数係数線型微分方程式の一般論で知られている．(例えば Ehrenpreis [1] 参照.) ここで $v=\mathrm{sp}(g-g_0)$ と定めよう．この時, L は x_0 を含むように選んであるものとすれば, 仮定により, $g-g_0$ は (x_0, τ_0) の近傍で実解析的である．しかも $g-g_0$ は $L\times L'$ の内部において, τ を正則パラメタとして持つから, 命題 3.8.8 により $\{x_0\}\times(L$ の内部$)$の近傍において実解析的, 即ち $u=v=\mathrm{sp}(g-g_0)=0$ が $\{(x_0, \sqrt{-1}\xi_0)\}\times(L$ の内部$)$の近傍において成立する．ここで L は D 内の任意の凸コンパクト集合であったから求める結果が得られた．　　　　(証終)

第4章　擬微分方程式論

§1.　擬微分作用素の定義とその基本的性質

第3章第4節において導入された超局所作用素は範囲が広すぎて具体的取り扱いが難かしい．例えば，二つの超局所作用素が与えられた時，その結合を具体的に計算するのは屢々困難である．この章では，超局所作用素の特別な場合として擬微分作用素*)を定義しその性質を考察しよう．

擬微分作用素のクラスはちょうど超局所作用素のクラスと微分作用素のクラスの中間に位置するもので，その萌芽は，既に第3章第4節定理3.4.3の中に見られる．その定理によれば，線型微分作用素 $P(x, D)$ の主要表象 $p_m(x, \xi)$ が $(x_0, \sqrt{-1}\xi_0)$ で消えなければ，その逆元が超局所作用素として存在することが判っている．然らば，そう云う逆元をも含むような，しかも，代数的取扱いが可能な程度に狭い超局所作用素のクラスはどんなものか，それがこの章の主題となる．

X を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合として，$P(x, D)=\sum a_\alpha(x)D^\alpha$ を X 上定義された解析函数を係数とする微分作用素としよう．(但し，$\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$は n 個の非負整数の組，D^α は第3章第4節に述べた通り $\partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}$ を表わす)．まず，$P(x, D)$ を超局所作用素とみた時の核函数 $K(x, x')dx'$ を計算することから始めよう．それは第3章第4節で既に注意したように，$(P(x, D_x)\delta(x-x'))dx'$ に他ならない．他方，平面波展開の公式（第3章第2節命題3.2.3）

$$\delta(x-x')=\frac{(n-1)!}{(-2\pi\sqrt{-1})^n}\int\frac{\omega(\xi)}{(\langle x-x', \xi\rangle+\sqrt{-1}0)^n}$$

の両辺に D_{x_j} を作用させれば

---

*)　最近英語の論文においては，著者等は pseudo-differential operator の代わりに micro-differential operator なる語を用いている．内容的に見て，micro-differential の方がより適切と思うけれど，適当な邦訳がまだ見つからないので，本書では，一応，擬微分作用素なる用語に統一した．これについてもよい邦訳を御教示頂ければ幸いである．

$$D_{x_j}\delta(x-x')=\frac{1}{(-2\pi\sqrt{-1})^n}\int\frac{-n!\xi_j}{(\langle x-x',\xi\rangle+\sqrt{-1}0)^{n+1}}\omega(\xi)$$

が得られる．これを更に微分して

$$D_x^\alpha\delta(x-x')=\frac{1}{(-2\pi\sqrt{-1})^n}\int\frac{(-1)^{|\alpha|}\xi^\alpha(n+|\alpha|-1)!}{(\langle x-x',\xi\rangle+\sqrt{-1}0)^{n+|\alpha|}}\omega(\xi)$$

となることは見易い．こうして

$$\begin{aligned}K(x,x')&=P(x,D_x)\delta(x-x')\\&=\frac{1}{(-2\pi\sqrt{-1})^n}\int\sum_\alpha\frac{(-1)^{|\alpha|}a_\alpha(x)\xi^\alpha(n+|\alpha|-1)!}{(\langle x-x',\xi\rangle+\sqrt{-1}0)^{n+|\alpha|}}\omega(\xi)\\&=\frac{1}{(-2\pi\sqrt{-1})^n}\int\sum_j\frac{(-1)^j(j+n-1)!p_j(x,\xi)}{(\langle x-x',\xi\rangle+\sqrt{-1}0)^{n+j}}\omega(\xi)\end{aligned}$$

（ここに $p_j(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=j}a_\alpha(x)\xi^\alpha$）

が得られる．$p_j(x,\xi)$ は ξ に関して，j 次斉次の多項式である．これを一般化して，$p_j(x,\xi)$ が多項式とは限らぬ正則函数にまで拡張して得られたのが擬微分作用素である．

以下の便宜の為に次の函数を導入しよう．

(4.1.1)　　$$\Phi_\lambda(\tau)=\frac{\Gamma(\lambda)}{(-\tau)^\lambda}\qquad(\tau\in\boldsymbol{C}-\{\tau\in\boldsymbol{R}\mid\ \tau\geqq 0\})$$

$(-\tau)^\lambda$ は，多価函数であるから，その分枝を $\tau=-1$ で $(-\tau)^\lambda=1$ となるようにとる．更にガンマ函数 $\Gamma(\lambda)$ は $\lambda=0,-1,-2,\cdots$ において一位の極をもつから，そのような λ に対しては $\Phi_\lambda(\tau)$ は式 (4.1.1) では定義されない．しかし，函数

$$(\lambda+m)\Phi_\lambda(\tau)=(\lambda+m)\Gamma(\lambda)/(-\tau)^\lambda=\frac{\Gamma(\lambda+m+1)}{\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+m-1)(-\tau)^\lambda}$$

は $\lambda=-m$ の近傍において正則で，$\lambda=-m$ におけるその値は $\dfrac{\tau^m}{m!}$ となる．

従って，$\Phi_\lambda(\tau)-\dfrac{\tau^m}{(\lambda+m)m!}$ は $\lambda=-m$ の近傍で正則である．以下では τ に関する特異性のみを問題にするので，このことから $\Phi_\lambda(\tau)$ を $\tau^m/(\lambda+m)m!$ とみなせる．よってこの函数の $\lambda=-m$ における値を $\Phi_{-m}(\tau)$ と置くことにしよう．実際に計算を遂行すれば，

$$\Phi_{-m}(\tau)=\frac{-1}{m!}\tau^m\left(\log(-\tau)+\left(\gamma-1-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{m}\right)\right)\quad(m=0,1,2,\cdots)$$

となる．但し $\gamma(=0.57721\cdots)$ は Euler の定数である．この時，

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\Phi_\lambda(\tau)=\Phi_{\lambda+1}(\tau)$$

が成り立つことは見易い．また，$\Gamma(\lambda)=\int_0^\infty e^{-t}t^{\lambda-1}dt$ より，容易に $\Phi_\lambda(\tau)=$ $=\int_0^\infty e^{t\tau}t^{\lambda-1}dt$ が $\mathrm{Re}\tau<0$, $\mathrm{Re}\lambda>0$ で成立することが導かれる．

この $\Phi_\lambda(\tau)$ を用いて $K(x,x')$ の定義式を書き直せば，

$$K(x,x')=P(x,D_x)\delta(x-x')$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\sum_j p_j(x,\sqrt{-1}\xi)\Phi_{n+j}(\sqrt{-1}(\langle x-x',\xi\rangle+\sqrt{-1}0))\omega(\xi)$$

が得られる．ここで $\Phi_\lambda(\sqrt{-1}\tau)$ は $\mathrm{Im}\tau>0$ で定義されることを注意しておこう．尚，以下，前後関係より明らかな時は $+\sqrt{-1}\,0$ を略することもある．

命題 4.1.1. $\{a_j(z)\}_{j\in\boldsymbol{Z}}$ を $z\in\Omega\subset\boldsymbol{C}^n$ で定義された正則函数の列で次の 2 つの条件を満たすものとする．

(4.1.2) Ω の任意のコンパクト部分集合 K に対してある正数 R_K が存在して

$$\sup_{z\in K}|a_j(z)|\leqq(-j)!\,R_K{}^{-j}\quad(j<0)$$

が成り立つ．

(4.1.3) Ω の任意のコンパクト部分集合 K と任意の正数 ε に対して，或る数 $C_{\varepsilon,K}$ が存在して

$$\sup_{z\in K}|a_j(z)|\leqq\frac{1}{j!}C_{\varepsilon,K}\varepsilon^j\quad(j\geqq0)$$

が成立する．

その時

(1) $\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_j(z)\Phi_{\lambda+j}(\tau)$ は $z\in\Omega$, $\{\tau\in\boldsymbol{C}\,|\,0<|\tau|\ll1,\ 0\neq\tau\}$ において広義一様に絶対収束し λ について $\boldsymbol{C}-\boldsymbol{Z}$ で多価正則函数を定める．しかも，$\lambda=0,\pm1,\pm2,\cdots$ では一位の極を持つ．

(2) $\sum_j a_j(z)\Phi_{\lambda+j}(\sqrt{-1}\tau)$ の $\{\mathrm{Im}\tau>0\}$ から境界値は $\lambda\in\boldsymbol{C}$ について正則なパラメタをもつ microfunction として意味を持つ．

[証明]

$$f_1(z,\tau)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j(z)\Phi_{\lambda+j}(\tau)=(-\tau)^{-\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}a_j(z)\Gamma(\lambda+j)(-\tau)^{-j}$$
$$=\Gamma(\lambda)(-\tau)^{-\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+j-1)a_j(z)(-\tau)^{-j}$$

となる．ここで

$$|\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+j-1)|\leqq|\lambda|(1+|\lambda|)\cdots(j-1+|\lambda|)$$

$\leqq(j-1)!|\lambda|(1+|\lambda|)\cdots\left(1+\dfrac{|\lambda|}{j-1}\right)$，かつ $1+x\leqq e^x$ $(x\geqq 0)$ 故，

これは $(j-1)!|\lambda|e^{|\lambda|(1+\cdots+1/(j-1))}$ でおさえられる．又，

$1+\cdots+\dfrac{1}{j-1}\leqq\displaystyle\int_1^{j-1}\frac{dx}{x}=1+\log(j-1)$ であるから，

$$(4.1.4)\qquad |\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+j-1)|\leqq(j-1)!|\lambda|e^{|\lambda|}(j-1)^{|\lambda|}$$

を得る．これより

$$|\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+j-1)a_j(z)|<|\lambda|(j-1)^{|\lambda|-1}e^{|\lambda|}\cdot C_{\varepsilon,K}\varepsilon^j$$

が，$z\in K$ の時成立する．

従って $\dfrac{(-\tau)^\lambda}{\Gamma(\lambda)}f_1(z,\tau)$ は $z\in\mathrm{Int}K$*)，$\varepsilon<|\tau|$ の時正則である．ここで ε，K は任意にとれるから，結局 $(-\tau)^\lambda f_1(z,\tau)/\Gamma(\lambda)$ は $z\in\Omega$，$\tau\in\boldsymbol{C}-\{0\}$ において正則となる．次に，

$$f_2(z,\tau)=\sum_{j<0}a_j(z)\Phi_{\lambda+j}(\tau)=\sum_{j>0}\Gamma(\lambda-j)a_{-j}(z)(-\tau)^{j-\lambda}$$

を考えよう．

今 m を十分大きい整数として

$$f_2(z,\tau)=\sum_{0<j<m}\Gamma(\lambda-j)a_{-j}(z)(-\tau)^{j-\lambda}+\sum_{j\geqq m}\Gamma(\lambda-j)a_{-j}(z)(-\tau)^{j-\lambda}$$

と書き直してみよう．この第一項は明らかに $\lambda\in\boldsymbol{C}, 0<|\tau|$ において多価有理型函数で $\lambda\in\boldsymbol{Z}$ に極を持つ．よって第二項について命題を証明すれば十分である．

$$\sum_{j\geqq m}\Gamma(\lambda-j)a_{-j}(z)(-\tau)^{j-\lambda}=\Gamma(\lambda-m)(-\tau)^{-\lambda}\sum_{j\geqq m}\frac{a_{-j}(z)}{(\lambda-m-1)\cdots(\lambda-j)}(-\tau)^j$$

$$=\Gamma(\lambda-m)(-\tau)^{-\lambda}\sum_{j\geqq m}\frac{(-1)^m a_{-j}(z)}{(1+m-\lambda)\cdots(j-\lambda)}\tau^j$$

今，$|\lambda|\leqq m$ ならば，$|(1+m-\lambda)\cdots(j-\lambda)|\geqq(1+m-|\lambda|)\cdots(j-|\lambda|)\geqq(j-m)!$
故，$z\in K$ の時

$$\left|\frac{a_{-j}(z)}{(1+m-\lambda)\cdots(j-\lambda)}\right|\leqq\frac{j!R_K^j}{(j-m)!}$$

従って，第二項は $z\in\mathrm{Int}K$，$0<|\tau|<1/R_K$ で収束する．（補題の証終）

注意．逆に $\sum_j a_j(z)\Phi_{\lambda+j}(\tau)$ が $0<|\tau|\ll 1$ で広義一様に絶対収束すれば，$\{a_j(z)\}$ は条件 (4.1.2) および (4.1.3) を満たす．

---

*)　Int K は K の開核を表わす．

この命題を用いて，次のような特殊な超局所作用素のクラスを導入しよう．

多様体 M として $\boldsymbol{R}^n$ を，その複素化 X として $\boldsymbol{C}^n$ をとろう．X の余接束 $T^*X\cong\boldsymbol{C}^n\times\boldsymbol{C}^n$ の座標を $(z,\zeta)=(z_1,\cdots,z_n,\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$ で表わそう．以下，λ は複素数，Ω は T^*X の開集合とする．

定義 4.1.1. Ωで定義された正則函数の列 $\{p_{\lambda+j}(z,\zeta)\}_{j\in\boldsymbol{Z}}$ で次の条件 (4.1.5), (4.1.6) を満たすものの全体を $\mathcal{E}^{\infty}_{(\lambda)}(\Omega)$ と記す．

(4.1.5) $p_{\lambda+j}(z,\zeta)$ は Ω で定義された正則函数であって ζ に関して $(\lambda+j)$ 次斉次である．(即ち，$\sum_{i=1}^{n}\zeta_i\dfrac{\partial}{\partial\zeta_i}p_{\lambda+j}(z,\zeta)=(\lambda+j)p_{\lambda+j}(z,\zeta)$が成立する．)

(4.1.6) $p_{\lambda+j}(z,\zeta)$ は次の増大度を持つ．

(4.1.6 a) 任意の Ω のコンパクト集合 K に対して，ある正数 C_K が存在して

$$|p_{\lambda+j}(z,\zeta)|\leqq C_K{}^{-j}(-j)!$$

が $(z,\zeta)\in K$, $j<0$ に対して成立する．

(4.1.6 b) Ω 内の任意のコンパクト集合 K と任意の正数 ε に対して，ある正数 $C_{K,\varepsilon}$ が存在して

$$|p_{\lambda+j}(z,\zeta)|<\frac{1}{j!}C_{K,\varepsilon}\varepsilon^j$$

が $(z,\zeta)\in K$, $j\geqq 0$ に対して成立する．

この時

$$P(z,D)=\sum_j p_{\lambda+j}(z,D)$$

と記し，これを Ω で定義された**擬微分作用素**と呼ぶ．$\{\mathcal{E}^{\infty}_{(\lambda)}(\Omega)\}$ は明らかに層をなすから，これを $\mathcal{E}^{\infty}_{(\lambda)}$ と記す．又，$\mathcal{E}(\lambda)$ により，$P=\sum_j p_{\lambda+j}(z,D)$ であって $p_{\lambda+j}=0(j>0)$ を満たす作用素の作る層を表わす．更に，$\mathcal{E}_{(\lambda)}$ により $\bigcup_{j\in\boldsymbol{Z}}\mathcal{E}(\lambda+j)$ を，また，$\mathcal{E}^{\infty},\mathcal{E}$ により，各々 $\mathcal{E}^{\infty}_{(\lambda)},\mathcal{E}_{(\lambda)}$ において $\lambda=0$ と置いたものを表わすこととする．$\mathcal{E}(\lambda)$ の元に対し，$\mathrm{ord}P=\lambda$ と記し，Pの**階数**と呼ぶ．$\mathcal{E}_{(\lambda)}$ の元を**有限階の擬微分作用素**，$\mathcal{E}(\lambda)$ の元を高々 λ 階の擬微分作用素，$\mathcal{E}^{\infty}_{(\lambda)}$ の元(であって $\mathcal{E}_{(\lambda)}$ の元でないもの) を**無限階の擬微分作用素**と呼ぶ．

注意． $\cosh(\sqrt{D_1})\underset{\mathrm{def}}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{D_1{}^n}{(2n)!}$ が最も簡単な無限階擬微分作用素(実は微分作用素)の一例である．無限階の作用素は，(複素数体上の)正則函数の構造と深く結びついており，解析的に極めて有用な道具ではあるけれど，かなり扱いが

難しいので，以下本書では殆んど用いない．なお，無限階の擬微分作用素は，以下に示するように，microfunction の層に層準同型として作用するけれども，distribution を出発点に microfunction の類似物を構成しても，それには作用しないことも注意しておこう．

上で，$P(z, D)$ を擬微分"作用素"と呼んだが，実際，これがある超局所作用素を定めることを次に示そう．その為に Ω が $\boldsymbol{R}_+^\times$ の作用で不変である(即ち，$(z, \zeta)\in\Omega$，$c>0$ ならば $(z, c\zeta)\in\Omega$) としよう．この時 $P(z, D)$ は，次のようにして $R(\Omega)=\{(x, \sqrt{-1}\xi\infty)\in\sqrt{-1}S^*\boldsymbol{R}^n \mid (x, \sqrt{-1}\xi)\in\Omega\}$ 上の超局所作用素を定めることが示される．

命題 4.1.1 によって

$$\sum_j p_{\lambda+j}(z, \sqrt{-1}\zeta)\Phi_{\lambda+j+n}(\sqrt{-1}\tau)$$

の $\mathrm{Im}\tau>0$ からの境界値は超函数として意味を持つ．ここで $\tau=\langle x-y, \zeta\rangle$ とおいて $K(x, y, \zeta)$ を $\sum_j p_{\lambda+j}(x, \sqrt{-1}\zeta)\Phi_{\lambda+j+n}(\sqrt{-1}(\langle x-y, \zeta\rangle))$ の $\mathrm{Im}(\langle x-y, \zeta\rangle)>0$ からの境界値としよう．その時，$K(x, y, \zeta)$ は $\{(x, y, \zeta) \mid x=y,\ (x, \sqrt{-1}\zeta)\in\Omega\}$ を含む開集合 U で定義された超函数である．しかも，$\langle x-y, \zeta\rangle\neq0$ では正則であり，又 $\mathrm{Im}\langle x-y, \zeta\rangle>0$ で定義された正則函数の境界値として得られることから，

$$\begin{aligned}\mathrm{S.S.}K(x, y, \zeta)\subset G=\{&(x, y, \zeta; \sqrt{-1}(\xi, \eta, \rho)\infty) \mid (x, y, \zeta)\in U,\ \langle x-y, \zeta\rangle=0,\\ &\xi=-\eta=k\zeta\ \ \rho=k(x-y)\ \text{が或る}\ k>0\ \text{に対して成立する}\}\end{aligned}$$

は明らかである．そこで

$$K(x, y)=\int K(x, y, \zeta)\omega(\zeta)$$

と置こう．G の点が $\rho=0$ を満たす時，($k>0$ 故) $x=y$ である．よって，

$$\begin{aligned}Z\underset{\mathrm{def}}{=}G\cap\{(x, y, \zeta; \sqrt{-1}(\xi, \eta, \rho)\infty) \mid \rho=0\}=\\ =\{(x, y, \zeta; \sqrt{-1}(\xi, \eta, \rho)\infty) \mid (x, \sqrt{-1}\zeta)\in\Omega,\ x=y,\ \xi=-\eta=k\zeta(k>0),\ \rho=0\}\end{aligned}$$

となる．従って，Z から $(x, y, \sqrt{-1}(\xi, \eta)\infty)$ 空間への射影は固有写像であり，その像は$\{(x, y; \sqrt{-1}(\xi, \eta)\infty) \mid \xi=-\eta, x=y, (x, \sqrt{-1}\xi)\in\Omega\}$に含まれる．従って，$K(x, y)$は $\{(x, y; \sqrt{-1}(\xi, \eta)\infty) \mid (x, \sqrt{-1}\xi)\in R(\Omega)\}$ で定義された microfunction で，その台は，$\{x=y,\ \xi=-\eta\}$ に入る．従って，$K(x, y)dx$ は $R(\Omega)$ で定義された超局所作用素を定義する．

注意. Microfunction の層の脆弱性により，超局所作用素の層 $\mathcal{L}$ もまた脆弱層となるが，擬微分作用素の層 $\mathcal{E}$ は，脆弱層とは丁度対称的な，一意接続性を持つ"固い"層である．如何にこの二つの概念の差が大きいかがよく判るであろう．

以下擬微分作用素に関するいくつかの公式を証明する．その為にまず次の公式に注意しよう．

命題 4.1.2.

$$(4.1.5')\quad \int_{S^{n-1}} \xi_{1+}^{\lambda_1-1}\cdots\xi_{n+}^{\lambda_n-1}\,\Phi_{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}(\sqrt{-1}(\langle\xi,x\rangle+\sqrt{-1}\,0))\omega(\xi)=$$
$$=\Phi_{\lambda_1}(\sqrt{-1}(x_1+\sqrt{-1}0))\cdots\Phi_{\lambda_n}(\sqrt{-1}(x_n+\sqrt{-1}\,0))$$

［証明］ x_j が $x_j+\sqrt{-1}\varepsilon_j(\varepsilon_j>0)$ と云う形を満たす複素数の時に上式を証明すれば十分である．$\mathrm{Im}x_j>0$, $\xi_j\geqq 0$ ならば，

$$\Phi_{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}(\sqrt{-1}(\langle\xi,x\rangle+\sqrt{-1}\,0))=\int_0^\infty e^{\sqrt{-1}t\langle\xi,x\rangle}t^{\lambda_1+\cdots+\lambda_n-1}dt$$

が成立するから，(4.1.5′) の左辺の積分は

$$\int_{S^{n-1}}\omega(\xi)\xi_{1+}^{\lambda_1-1}\cdots\xi_{n+}^{\lambda_n-1}\int_0^\infty e^{\sqrt{-1}t\langle\xi,x\rangle}t^{\lambda_1+\cdots+\lambda_n-1}dt$$

となる．これは次のように書き換え得る：

$$\int_0^\infty t^{n-1}dt\int_{S^{n-1}}\omega(\xi)\ \ (t\xi_1)_+^{\lambda_n-1}\cdots(t\xi_n)_+^{\lambda_n-1}e^{\sqrt{-1}\langle t\xi,x\rangle}$$
$$=\int_{R^n}d\xi\ \xi_{1+}^{\lambda_1-1}\cdots\xi_{n+}^{\lambda_n-1}e^{\sqrt{-1}\langle\xi,x\rangle}$$
$$=\prod_{j=1}^n\int_0^\infty\xi_j^{\lambda_j-1}e^{\sqrt{-1}\xi_jx_j}\,d\xi_j=\prod_{j=1}^n\Phi_{\lambda_j}(\sqrt{-1}x_j)=(4.1.5')\ \text{の右辺}.$$

（証終）

これを用いて，Radon 変換の公式 (4.1.8) および (4.1.9) を証明しよう．(その公式の幾何学的意味については例えば，Gel'fand-Graev-Vilenkin[1] を参照．)その為に λ を任意の複素数として，$(\boldsymbol{R}^n-\{0\})\times(\boldsymbol{R}^n-\{0\})$ 上の函数 $\delta_\lambda(x,y)$ を次のように定義する．

$\pm x_j>0$ の時，

$$\delta_\lambda(x,y)=|x_j|^\lambda\prod_{k\neq j}\delta\Bigl(y_k-\frac{y_j}{x_j}x_k\Bigr)(\pm y_j)_+^{-\lambda-1}$$

実際，$\varepsilon_j x_j > 0, \varepsilon_k x_k > 0$ $(\varepsilon_j, \varepsilon_k = \pm 1)$ の時

$$|x_j|^\lambda \prod_{l \neq j} \delta\left(y_l - \frac{y_j}{x_j} x_l\right)(\varepsilon_j y_j)_+^{-\lambda-1} = |x_k|^\lambda \prod_{l \neq k} \delta\left(y_l - \frac{y_k}{x_k} x_l\right)(\varepsilon_k y_k)_+^{-\lambda-1}$$

故，$\delta_\lambda(x, y)$ は $(\boldsymbol{R}^n - \{0\}) \times (\boldsymbol{R}^n - \{0\})$ 上の超函数として well-defined である．定義より容易に判るように，$\delta_\lambda(x, y)$ は x について λ 次斉次，y について $(-\lambda-n)$ 次斉次である．又，

$$\mathrm{Supp}\ \delta_\lambda(x, y) \subset \{(x, y) \mid x = ty \ \ (t > 0)\}$$

となることも見易い．更に

$$\delta_\lambda(x, y) = \delta_{-n-\lambda}(y, x) = \delta_\lambda(-x, -y)$$

も明らかであろう．

補題 1. $u(x)$ が $(\boldsymbol{R}^n - \{0\})$ 上の λ 次斉次超函数とすると

$$u(x) = \int \delta_\lambda(x, y) u(y) \omega(y)$$

これは定義から殆ど自明である．

補題2. (4.1.6′) $$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{S^{n-1}} \Phi_{-\lambda}\left(\sqrt{-1}(\langle x, \xi\rangle + \sqrt{-1}\,0)\right) \times$$
$$\times \Phi_{\lambda+n}\left(-\sqrt{-1}(\langle y, \xi\rangle - \sqrt{-1}\,0)\right)\omega(\xi) = \delta_\lambda(x, y)$$

［証明］ 命題 4.1.2 を用いて

$$\Phi_{-\lambda}\left(\sqrt{-1}(\langle x, \xi\rangle + \sqrt{-1}\,0)\right)\Phi_{\lambda+n}\left(-\sqrt{-1}(\langle y, \xi\rangle - \sqrt{-1}\,0)\right)$$
$$= \int t_+^{-\lambda-1} s_+^{\lambda+n-1} \Phi_n\left(\sqrt{-1}(\langle tx - sy, \xi\rangle + \sqrt{-1}\,0)\right)\omega(t, s)$$

よって式 (4.1.6′) の左辺は

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int t_+^{-\lambda-1} s_+^{\lambda+n-1} \omega(t, s) \int \Phi_n\left(\sqrt{-1}(\langle tx - sy, \xi\rangle + \sqrt{-1}\,0\right)\omega(\xi)$$
$$= \int t_+^{-\lambda-1} s_+^{\lambda+n-1} \delta(tx - sy)\omega(t, s)$$

となる．ここで例えば，$x_1 > 0$ とすると

$$\int t_+^{-\lambda-1} s_+^{\lambda+n-1} \delta(tx - sy)\omega(t, s) = \int t_+^{-\lambda-1} \delta(tx - y) dt$$
$$= \left(\frac{y_1}{x_1}\right)_+^{-\lambda-1} \prod_{j \neq 1} \delta\left(\frac{y_1}{x_1} x_j - y_j\right)\frac{1}{x_1}$$

となり，これは $\delta_\lambda(x, y)$ に等しい． （証終）

補題 3. $GL(n; \boldsymbol{R})$ の元 g に対し

$$\delta_\lambda(gx, gy)=|\det g|^{-1}\delta_\lambda(x, y) \tag{4.1.7}$$

が成立する.

これは定義より明らかである.

命題 4.1.3. $(\boldsymbol{R}^n-\{0\})$ 上の λ 次斉次函数 $u(x)$ と $(\boldsymbol{R}^n-\{0\})$ 上の $(-n-\lambda)$ 次斉次函数 $v(\xi)$ は

$$v(\xi)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int u(x)\,\Phi_{\lambda+n}(\sqrt{-1}(\langle x, \xi\rangle+\sqrt{-1}\,0))\omega(x) \tag{4.1.8}$$

$$u(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int v(\xi)\,\Phi_{-\lambda}(-\sqrt{-1}(\langle x, \xi\rangle-\sqrt{-1}\,0))\omega(\xi) \tag{4.1.9}$$

によって一対一に対応する.

［証明］ $v(\xi)$ が $u(x)$ より式 (4.1.8) により与えられれば,

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int v(\xi)\Phi_{-\lambda}(-\sqrt{-1}(\langle x, \xi\rangle-\sqrt{-1}\,0))\omega(\xi)$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int u(y)\omega(y)\int\Phi_{\lambda+n}(\sqrt{-1}\langle y, \xi\rangle+\sqrt{-1}\,0)\times$$
$$\times\Phi_{-\lambda}(-\sqrt{-1}(\langle x, \xi\rangle-\sqrt{-1}\,0))\omega(\xi)$$
$$=\int u(y)\delta_\lambda(x, y)\omega(y)=u(x)$$

を得る. 又, $u(x)$ が $v(\xi)$ より (4.1.9) により定められた場合も同様である.

(証終)

命題 4.1.4. $P(x, D_x)=\sum_j p_{\lambda+j}(x, D_x)$ とする. その時 μ を n 以上の整数として,

$$P(x, D_x)\Phi_\mu(\sqrt{-1}(\langle x, \xi\rangle+p+\sqrt{-1}\,0)) \tag{4.1.10}$$
$$=\sum_j p_{\lambda+j}(x, \sqrt{-1}\,\xi)\Phi_{\lambda+\mu+j}(\sqrt{-1}(\langle x, \xi\rangle+p+\sqrt{-1}\,0))$$

［証明］ まず $\mu=n$ の場合を考えよう.

$$K(x, \xi, p)=\frac{1}{(2\pi)^n}\sum p_{\lambda+j}(x, \sqrt{-1}\,\xi)\Phi_{n+\lambda+j}(\sqrt{-1}(\langle x, \xi\rangle+p+\sqrt{-1}\,0))$$

とおけば. (4.1.10) の左辺は

$$\int K(x, \eta, -\langle y, \eta\rangle)\Phi_n(\sqrt{-1}(\langle y, \xi\rangle+p+\sqrt{-1}\,0))\omega(\eta)dy$$
$$=\int K(x, \eta, t)dt\int\delta(t+\langle y, \eta\rangle)\Phi_n(\sqrt{-1}(\langle y, \xi\rangle+p+\sqrt{-1}\,0))\omega(\eta)dy$$

となる. 一方

$$\delta(t+\langle y, \eta\rangle)=\frac{1}{2\pi}\Phi_1(-\sqrt{-1}(t+\langle y, \eta\rangle-\sqrt{-1}\,0))\quad 故$$

$$\int\delta(t+\langle y,\eta\rangle)\Phi_n(\sqrt{-1}(\langle y,\xi\rangle+p+\sqrt{-1}\,0))\omega(\eta)dy$$
$$=\frac{1}{(2\pi)}\int\Phi_1(-\sqrt{-1}(y_0t+\langle y,\eta\rangle-\sqrt{-1}\,0))\times$$
$$\times\Phi_n(\sqrt{-1}(\langle y,\xi\rangle+y_0p+\sqrt{-1}\,0))\omega(y_0,y)\omega(\eta)=(2\pi)^n\delta_n((p,\xi),(t,\eta))$$

従って (4.1.10) の左辺は

$$(2\pi)^n\int K(x,\eta,t)\delta_n((p,\xi),(t,\eta))\omega(t,\eta)=(2\pi)^nK(x,\xi,p)$$

に等しい．よって (4.1.10) を得る．

一般の μ に対しては

$$\Phi_\mu(\sqrt{-1}(\langle x,\xi\rangle+p+\sqrt{-1}\,0))$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int\Phi_n(\sqrt{-1}(\langle x,\xi\rangle+t+\sqrt{-1}\,0))\Phi_{\mu-n+1}(\sqrt{-1}(p-t+\sqrt{-1}\,0))dt$$

故,

$$P(x,D_x)\Phi_\mu(\sqrt{-1}(\langle x,\xi\rangle+p+\sqrt{-1}\,0))$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int\Phi_{\mu-n+1}(\sqrt{-1}(p-t+\sqrt{-1}\,0))\times$$
$$\times(\sum_j p_{\lambda+j}(x,\sqrt{-1}\,\xi)\Phi_{n+\lambda+j}(\sqrt{-1}(\langle x,\xi\rangle+t+\sqrt{-1}\,0))dt$$
$$=\left(\frac{D_p}{\sqrt{-1}}\right)^{\mu-n}\sum_j p_{\lambda+j}(x,\sqrt{-1}\,\xi)\Phi_{n+\lambda+j}(\sqrt{-1}(\langle x,\xi\rangle+p+\sqrt{-1}\,0))$$

が成り立つ．よって次の補題を証明すれば十分である．

補題 1. $a_{jk}(t,z)$ $(j,k\in\boldsymbol{Z})$ を $t=0$, $z=0$ の近傍 U で定義された正則函数であって $\sum_{j,k}a_{jk}(t,z)\Phi_{\lambda+j}(p)\Phi_{\mu+k}(q)$ が $(t,z)\in U$, $0<|p|,|q|\ll1$ で広義一様に絶対収束するものとする．その時 $u(t,s,x)$ を

$$(\sum_{j,k}a_{jk}(t,x)\Phi_{\lambda+j}(\sqrt{-1}(t-s))\Phi_{\mu+k}(\sqrt{-1}s)$$

の $\mathrm{Im}(t-s)$, $\mathrm{Im}s>0$ からの境界値とすれば microfunction として, $\sqrt{-1}\,dt$ の近傍で

$$\int u(t,s,x)ds=2\pi\sum_{j,k}a_{jk}(t,x)\Phi_{\lambda+\mu+j+k-1}(\sqrt{-1}t)$$

が成立する．

［証明］ a を十分小さい正数とし,

$$I_a(t,x)=\int_{\gamma_a}u(t,s,x)ds$$

とおく．但し, γ_a は $-a$ から a までの道であって $\mathrm{Im}s\geqq0$に含まれ, しかも原点

を通らないものとする．この時，$\int u(t,s,x)ds$ は $I_a(t,x)$ の境界値である．一方

$$I_a(t,x)=\sum_{j,k} a_{j,k}(t,x)\int_{\gamma_a}\Phi_{\lambda+j}(\sqrt{-1}(t-s))\Phi_{\mu+k}(\sqrt{-1}s)ds$$

となる．ここで，この右辺にあらわれる積分を計算しよう．その為に次の補題を準備しよう．

補題 2.

$$(4.1.11)\quad \int_{-a}^{b}\Phi_\lambda(\sqrt{-1}(t-s+\sqrt{-1}0))\Phi_\mu(\sqrt{-1}(s+\sqrt{-1}\,0))ds$$
$$-2\pi\Phi_{\lambda+\mu-1}(\sqrt{-1}(t+\sqrt{-1}0))=-\Gamma(\mu)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+n)}{n!(\lambda+\mu+n-1)}\times$$
$$\times\left(e^{\frac{\pi i}{2}(\mu-\lambda)}b^{1-\lambda-\mu}\left(\frac{t}{b}\right)^n+(-1)^n e^{\frac{\pi i}{2}(\lambda-\mu)}a^{1-\lambda-\mu}\left(\frac{t}{a}\right)^n\right)$$

［証明］ λ と μ に関する解析接続を用いることにより $\mathrm{Re}\lambda\gg 0$, $\mathrm{Re}\mu\gg 0$ の場合に証明すれば十分である．$\mathrm{Re}\lambda\gg 0$, $\mathrm{Re}\mu\gg 0$ の時

$$2\pi\Phi_{\lambda+\mu-1}(\sqrt{-1}(t+\sqrt{-1}0))=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_\lambda(\sqrt{-1}(t-s+\sqrt{-1}\,0))\times$$
$$\times\Phi_\mu(\sqrt{-1}(s+\sqrt{-1}\,0))ds$$

が成り立つから，式 (4.3.11) の左辺は

$$\left(\int_{-a}^{-\infty}-\int_{b}^{\infty}\right)\Phi_\lambda(\sqrt{-1}(t-s+\sqrt{-1}\,0))\,\Phi_\mu(\sqrt{-1}(s+\sqrt{-1}\,0))ds$$

となる．ここで

$$\int_b^\infty\Phi_\lambda(\sqrt{-1}(t-s+\sqrt{-1}\,0))\,\Phi_\mu(\sqrt{-1}(s+\sqrt{-1}\,0))ds$$
$$=e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}(\mu-\lambda)}\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)\int_b^\infty(s-t)^{-\lambda}s^{-\mu}ds$$
$$=e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}(\mu-\lambda)}\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)\int_b^\infty s^{-\lambda-\mu}\left(1-\frac{t}{s}\right)^{-\lambda}ds$$
$$=e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}(\mu-\lambda)}\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)\int_b^\infty(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+n-1)}{n!}t^n s^{-\lambda-\mu-n})ds$$
$$=e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}(\mu-\lambda)}\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+n-1)}{n!(\lambda+\mu+n-1)}b^{-\lambda-\mu-n+1}t^n$$

となる．$-a$ から $-\infty$ までの積分も同様に計算できて，補題を得る．

（補題の 2 証終）

ここで補題 1 の証明に戻ろう．補題 2 により

$$(4.1.12)\quad I_a(t,x)=2\pi\sum_{j,k}a_{j,k}(t,x)\Phi_{\lambda+\mu+j+k-1}(\sqrt{-1}\,t)$$

（次頁に続く）

$$-\sum_{\substack{j,k,n\\n\geq 0}} \frac{\Gamma(\lambda+n+j)\Gamma(\mu+k)}{n!(\lambda+\mu+j+k+n-1)}\left(e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}(\mu+k-\lambda-j)}+(-1)^n e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}(\lambda+j-\mu-k)}\right)\times$$
$$\times a_{j,k}(t,x)a^{1-\lambda-\mu-j-k}\left(\frac{t}{a}\right)^n$$

を得る．よってこの第二項の和が $0<|a|\ll 1$, $|t/a|\ll 1$ で絶対収束することを言えばよい．第二項は

$$\text{(4.1.13)}\quad \int da \sum_{\substack{j,k,n\\n\geq 0}} \frac{\Gamma(\lambda+n+j)e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}(k-j)}\left(e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}(\mu-\lambda)}+(-1)^{n+j+k}e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}(\lambda-\mu)}\right)}{n!\Gamma(\lambda+j)}\times$$
$$\times a_{j,k}(t,x)\Phi_{\lambda+j}(-a)\Phi_{\mu+k}(-a)(t/a)^n$$

と書き直せる．

ここで $c\geqq\frac{1}{2}|e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}(\mu-\lambda)}|$, $\frac{1}{2}|e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}(\lambda-\mu)}|$ となる c に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{\Gamma(\lambda+n+j)e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}(k-j)}\left(e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}(\mu-\lambda)}+(-1)^{n+j+k}e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}(\lambda-\mu)}\right)}{n!\Gamma(\lambda+j)}\left(\frac{t}{a}\right)^n\right|$$
$$\leqq c\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(|\lambda|+|j|+n-1)\cdots(|\lambda|+|j|)}{n!}\left|\frac{t}{a}\right|^n$$
$$=c\left(1-\left|\frac{t}{a}\right|\right)^{-|\lambda|-|j|}$$

を得る．他方

$$\sum_{j,k}|a_{j,k}(t,x)||\Phi_{\lambda+j}(-a)||\Phi_{\mu+k}(-a)|\left(1-\left|\frac{t}{a}\right|\right)^{-|j|}$$

は絶対収束するから，(4.1.13) の被積分函数は絶対収束する．

(補題1の証終)

この補題1を用いれば命題4.1.4の証明は容易に得られる．

さて $P(x,D_x)=\sum_j p_{\lambda+j}(x,D_x)$ を $x\in\boldsymbol{R}^n$ に関する擬微分作用素としよう．その核を $K(x,x')dx'$ とする．今 y を $\boldsymbol{R}^m$ の座標として

$$K(x,x')\,\delta\,(y-y')dx'dy'$$

を考えれば，これは $\boldsymbol{R}^{n+m}$ 上の超局所作用素の核函数を定める．更にこれは (x,y) に関する擬微分作用素となって，$\sum_j r_{\lambda+j}(x,y,D_x,D_y)$，(但し，$r_{\lambda+j}(x,y;\xi,\eta)=p_{\lambda+j}(x,\xi)$) に等しい．実際，

$$K(x,x')\delta(y-y')=P(x,D_x)\delta(x-x')\delta(y-y')$$

であり，しかも命題4.1.4により

$$P(x,D_x)\Phi_{n+m}(\sqrt{-1}(\langle x-x',\xi\rangle+\langle y-y',\eta\rangle+\sqrt{-1}0))=$$

$$=\sum_j p_{\lambda+j}(x, \sqrt{-1}\,\xi)\Phi_{n+m+\lambda+j}(\sqrt{-1}(\langle x-x', \xi\rangle+\langle y-y', \eta\rangle+\sqrt{-1}\,0))$$
$$=\sum_j r_{\lambda+j}(x, y, \sqrt{-1}\,\xi, \sqrt{-1}\eta)\Phi_{n+m+\lambda+j}(\sqrt{-1}(\langle x-x', \xi\rangle+\langle y-y', \eta\rangle+ +\sqrt{-1}\,0))$$

となる．よって

$$R(x, y, D_x, D_y)\delta(x-x')\delta(y-y')$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^{n+m}}\int p(x, D_x)\Phi_{n+m}(\sqrt{-1}(\langle x-x', \xi\rangle+\langle y-y', \eta\rangle+\sqrt{-1}\,0))\omega(\xi, \eta)$$
$$=P(x, D_x)\,\delta(x-x', y-y')$$

となる．従って，以下 $\boldsymbol{R}^n$ 上の擬微分作用素 $P(x, D_x)$ を自由に $\boldsymbol{R}^{n+m}$ 上の擬微分作用素と見做すこととする．

命題 4.1.5. $P(x, D_x)=\sum_j p_{\lambda+j}(x, D_x)$ を擬微分作用素，$a_j(x)$ を条件 (4.1.2) 及び (4.1.3) を満たす函数列とする．更に

$$u(x, \xi, p)=\sum_j a_j(x)\Phi_{\mu+j}(\sqrt{-1}(\langle x, \xi\rangle+p+\sqrt{-1}\,0))$$

と置く．その時

$$b_l(x, \xi)=\sum_{l=j+k-|\alpha|}\frac{1}{\alpha!}\left(\frac{1}{\sqrt{-1}}D_\xi\right)^\alpha p_{\lambda+j}(x, \sqrt{-1}\xi)\,(D_x^\alpha a_k(x))$$

と置けば，$\{b_l(x, \xi)\}_{l\in \boldsymbol{Z}}$ は条件 (4.1.2) 及び (4.1.3) を満たし，更に

(4.1.14) $$P(x, D_x)u(x, \xi, p)=\sum_l b_l(x, \xi)\Phi_{\lambda+\mu+l}(\sqrt{-1}(\langle x, \xi\rangle+p+\sqrt{-1}\,0))$$

が成り立つ．

［証明］

$$P(x, D_x)u(x, \xi, p)$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\sum_{j,k} p_{\lambda+j}(x, \sqrt{-1}\eta)\Phi_{\lambda+n+j}(\sqrt{-1}(\langle x-y, \eta\rangle+\sqrt{-1}\,0))\times$$
$$\times a_k(y)\Phi_{\mu+k}(\sqrt{-1}(\langle y, \xi\rangle+p+\sqrt{-1}\,0))\omega(\eta)dy$$

ここで $a_k(y)=\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}(y-x)^\alpha D_x^\alpha a_k(x)$ と Taylor 展開して

$$(y-x)^\alpha\Phi_{\lambda+n+j}(\sqrt{-1}(\langle x-y, \eta\rangle+\sqrt{-1}\,0))$$
$$=(\sqrt{-1}D_\eta)^\alpha\Phi_{\lambda+n+j-|\alpha|}(\sqrt{-1}(\langle x-y, \eta\rangle+\sqrt{-1}\,0))$$

を用いれば，

(4.1.15) $$P(x, D_x)u(x, \xi, p)$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\sum_{j,k,\alpha}\frac{1}{\alpha!}p_{\lambda+j}(x, \sqrt{-1}\eta)\,(D_x^\alpha a_k(x))\,\Phi_{\mu+k}\,(\sqrt{-1}(\langle y, \xi\rangle+p+\sqrt{-1}\,0)\times$$
$$\times(\sqrt{-1}D_\eta)^\alpha\Phi_{\lambda+n+j-|\alpha|}(\sqrt{-1}(\langle x-y, \eta\rangle+\sqrt{-1}\,0))\omega(\eta)dy$$

を得る．もしここで η に関して項別に部分積分できれば，次式を得る：

$$P(x, D_x)u(x, \xi, p)$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\Big(\sum_{j,k,\alpha}\frac{1}{\alpha!}(-\sqrt{-1}D_\eta)^\alpha p_{\lambda+j+|\alpha|}(x, \sqrt{-1}\eta)\times$$
$$\times(D_x^\alpha a_k(x))\Phi_{\mu+k}(\sqrt{-1}(\langle y, \xi\rangle+p+\sqrt{-1}\,0))\times$$
$$\times\Phi_{\lambda+n+j}(\sqrt{-1}(\langle x-y, \eta\rangle+\sqrt{-1}\,0))\Big)\omega(\eta)dy$$

従って

$$c_{jk}(x, \eta)\underset{\mathrm{def}}{=}\sum\frac{1}{\alpha!}(-\sqrt{-1}D_\eta)^\alpha p_{\lambda+j+|\alpha|}(x, \sqrt{-1}\eta)D_x^\alpha a_k(x)$$

とおけば，

$$P(x, D_x)u(x, \xi, p)$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\sum_{j,k}c_{j,k}(x, \eta)\Phi_{\mu+k}(\sqrt{-1}(\langle y, \xi\rangle+p+\sqrt{-1}\,0)\times$$
$$\times\Phi_{\lambda+n+j}(\sqrt{-1}(\langle x-y, \eta\rangle+\sqrt{-1}\,0))\omega(\eta)dy$$

となる．そこで

$$f(x, \eta, t, s)\underset{\mathrm{def}}{=}\sum_{j,k}c_{j,k}(x, \eta)\Phi_{\mu+k}(\sqrt{-1}(t+\sqrt{-1}\,0))\Phi_{\lambda+1+j}(\sqrt{-1}(s+\sqrt{-1}\,0))$$

と定めれば，

$$P(x, D_x)u(x, \xi, p)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_s^{n-1}f(x, \eta, \langle y, \xi\rangle+p, \langle x-y, \eta\rangle)\omega(\eta)dy$$
$$=\frac{(\sqrt{-1})^{n-1}}{(2\pi)^n}\int f(x, \eta, t+p, \langle x, \eta\rangle+s)\delta(t-\langle y, \xi\rangle)\delta^{(n-1)}(s+\langle y, \eta\rangle)\omega(\eta)dydtds$$

を得る．ここで

$$\int\delta(t-\langle y, \xi\rangle)\delta^{(n-1)}(s+\langle y, \eta\rangle)dy$$

を計算しよう．これは，考えている点では超局所的に(即ち，余接束上局所的に)

$$\varphi(t, s, \xi, \eta)\underset{\mathrm{def}}{=}\frac{(-\sqrt{-1})^{n-1}}{(2\pi)^2}\int\Phi_1(\sqrt{-1}(t-\langle y, \xi\rangle+\sqrt{-1}\,0))\times$$
$$\times\Phi_n(\sqrt{-1}(s+\langle y, \eta\rangle+\sqrt{-1}\,0))dy$$

に等しい．ここで $\tilde{y}=(y_0, y)$ とおけば

$$\varphi(t, s, \xi, \eta)=\frac{(-\sqrt{-1})^{n-1}}{(2\pi)^2}\int\Phi_1(\sqrt{-1}(y_0t+\langle y, -\xi\rangle+\sqrt{-1}\,0))\times$$
$$\times\Phi_n(\sqrt{-1}(y_0s+\langle y, \eta\rangle+\sqrt{-1}\,0))\omega(\tilde{y})$$
$$=(2\pi)^{-2}(2\pi)^{n+1}(-\sqrt{-1})^{n-1}\delta_{-1}((-t, \xi), (s, \eta))$$

を得る．従って

$$\frac{(\sqrt{-1})^{n-1}}{(2\pi)^n}\int f(x,\eta,t+p,\langle x,\eta\rangle+s)\delta(t-\langle y,\xi\rangle)\delta^{(n-1)}(s+\langle y,\eta\rangle)\omega(\eta)dyds$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int f(x,\eta,t+p,\langle x,\eta\rangle+s)\delta_{-1}((-t,\xi),(s,\eta))\omega(\eta)ds$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int f(x,\eta,t+p,\langle x,\eta\rangle+s)\delta_{-1}((-t,\xi),(s,\eta))\omega(\eta,s)$$
$$=\frac{1}{2\pi}f(x,\xi,t+p,\langle x,\xi\rangle-t)$$

を得る．よって

$$P(x,D_x)u(x,\xi,p)=\frac{1}{2\pi}\int f(x,\xi,t+p,\langle x,\xi\rangle-t)dt,$$

従って，命題 4.1.4 の証明に用いた補題 1 により式 (4.1.14) を得る．但し，まだ，式 (4.1.15) において部分積分できることの証明が残っている．

それを示すには，ある超函数 G_ν $(\nu=1,\cdots,n)$ があって

$$\Big\{\sum_{j,k,\alpha}\frac{1}{\alpha!}p_{\lambda+j}(x,\sqrt{-1}\eta)(D_x^\alpha a_k(x))\Phi_{\mu+k}(\sqrt{-1}(\langle y,\xi\rangle+p+\sqrt{-1}\,0))\times$$
$$\times(\sqrt{-1}D_\eta)^\alpha\Phi_{\lambda+n+j-|\alpha|}(\sqrt{-1}(\langle x-y,\ \eta\rangle+\sqrt{-1}\,0))\Big\}$$
$$-\Big\{\sum_{j,k,\alpha}\frac{1}{\alpha!}(-\sqrt{-1}D_\eta)^\alpha p_{\lambda+j}(x,\sqrt{-1}\eta)(D_x^\alpha a_k(x))\times$$
$$\times\Phi_{\mu+k}(\sqrt{-1}(\langle y,\xi\rangle+p+\sqrt{-1}0))\Phi_{\lambda+n+j-|\alpha|}(\sqrt{-1}(\langle x-y,\eta\rangle+\sqrt{-1}0)\Big\}$$
$$=\sum_{\nu=1}^n\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial\eta_\nu}G_\nu$$

と書けることを言えばよい．何故なら，この時

$$\int\frac{\partial}{\partial\eta_\nu}G_\nu\omega(\eta)=0$$

となるからである．G_ν の構成の詳しい議論は読者にゆだねる．（G_ν を形式的な無限級数の形で求めることは，次の補題を用いて容易に行い得る．後はその収束性を論じればよい．）

補題．$P(\xi)$ を m 次斉多項式とする時

$$a(x)(P(D_x)b(x))-(P(-D_x)a(x))b(x)$$
$$=\sum_j\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\sum_{|\alpha|<m}\frac{(-1)^{|\alpha|}(m-|\alpha|-1)!\,|\alpha|!}{m!\ \alpha!}(D_x^\alpha a)P^{(\alpha+\delta_j)}(D_x)b\Big)$$

が成り立つ．但し，$P^{(\alpha)}(\xi)=D_\xi^\alpha P$, $\delta_j=(0,\cdots0,1,0,\cdots,0)$（1 は j 番目）．

［証明］ 右辺は

$$(4.1.15')\quad \sum_{|\alpha|<m}\frac{(-1)^{|\alpha|}(m-|\alpha|-1)!\,|\alpha|!}{m!\ \alpha!}(D^{\alpha+\delta_j}a)P^{(\alpha+\delta_j)}(D)b+$$

$$+\sum_{|\alpha|<m}\frac{(-1)^{|\alpha|}(m-|\alpha|-1)!\,|\alpha|!}{m!\ \alpha!}(D^\alpha a)(\sum_j D_jP^{(\alpha+\delta_j)}(D)b)$$

に等しい．ここで $P^{(\alpha)}$ は $(m-|\alpha|)$ 次斉次故，

$$\sum_j D_jP^{(\alpha+\delta_j)}(D)=(m-|\alpha|)P^{(\alpha)}$$

よって，(4.1.15′) の第二項は

$$\sum_{|\alpha|<m}\frac{(-1)^{|\alpha|}(m-|\alpha|)!\,|\alpha|!}{m!\ \alpha!}(D^\alpha a)(P^{(\alpha)}(D)b)$$

となる．又，第一項は

$$\sum_{0<|\beta|\leq m}\frac{(-1)^{|\beta|-1}(m-|\beta|)!\,(|\beta|-1)!}{m!}\Big(\sum_{\beta=\alpha+\delta_j}\frac{1}{\alpha!}\Big)(D^\beta a)P^{(\beta)}(D)b$$

となる．一方

$$\sum_{\beta=\alpha+\delta_j}\frac{1}{\alpha!}=\sum\frac{\beta_j}{\beta!}=\frac{|\beta|}{\beta!}$$

であるから，(4.1.15′) の第一項は

$$\sum_{0<|\beta|\leq m}\frac{(-1)^{|\beta|-1}(m-|\beta|)!\,|\beta|!}{m!\ \beta!}(D^\beta a)P^{(\beta)}(D)b$$

となる．よって，式 (4.1.15) は

$$\sum_{|\alpha|=m}\frac{(-1)^{|\alpha|-1}(m-|\alpha|)!\,|\alpha|!}{m!\ \alpha!}(D^\alpha a)P^{(\alpha)}(D)b+aP(D)b$$
$$=aP(D)b-\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\alpha!}(P^{(\alpha)}(D)(-D)^\alpha a)b=aP(D)b-(P(-D)a)b$$

となる．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証終)

命題 4.1.5 を用いて，擬微分作用素の結合に関する次の基本的な結果を得る．

定理 4.1.1. $P(x,D_x)=\sum_j p_{\lambda+j}(x,D_x)$ を $\mathscr{E}_{(\lambda)}$ に属する擬微分作用素，$Q(x,D_x)=\sum_k q_{k+\mu}(x,D_x)$ を $\mathscr{E}_{(\mu)}$ に属する擬微分作用素とする．その時 P と Q の結合 $R=PQ$ は $\mathscr{E}_{(\lambda+\mu)}$ に属する．更に $R=\sum_l r_{\lambda+\mu+l}(x,D_x)$ と表わした時

$$r_{\lambda+\mu+l}(x,\sqrt{-1}\xi)=\sum_{l=j+k-|\alpha|}\frac{1}{\alpha!}\Big(\Big(\frac{1}{\sqrt{-1}}D_\xi\Big)^\alpha p_{\lambda+j}(x,\sqrt{-1}\xi)\Big)\times \times(D_x^\alpha q_{\mu+k}(x,\sqrt{-1}\xi)) \tag{4.1.16}$$

が成立する．

［証明］　命題 4.1.5 により，

$$Q(x,D_x)\Phi_n(\sqrt{-1}(\langle x,\xi\rangle+p))=\sum_k q_{\mu+k}(x,\sqrt{-1}\,\xi)\Phi_{\mu+k+n}(\sqrt{-1}(\langle x,\xi\rangle+p))$$

を得る．ここで再び命題 4.1.5 を $PQ\Phi_n(\sqrt{-1}(\langle x,\xi\rangle+p))$ に適用して，

$$PQ\Phi_n(\sqrt{-1}(\langle x,\xi\rangle+p))=\sum_l r_{\lambda+\mu+l}(x,\sqrt{-1}\xi)\Phi_{\lambda+\mu+l+n}(\sqrt{-1}(\langle x,\xi\rangle+p))$$

但し

$$r_{\lambda+\mu+l}(x,\sqrt{-1}\xi)=\sum_{l=j+k-|\alpha|}\frac{1}{\alpha!}\left(\frac{1}{\sqrt{-1}}D_\xi\right)^\alpha p_{\lambda+j}(x,\sqrt{-1}\,\xi)(D_x^\alpha q_{\mu+k}(x,\sqrt{-1}\,\xi))$$

を得る．従って

$$PQ\delta(x-y)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int PQ\Phi_n(\sqrt{-1}(\langle x,\xi\rangle-\langle y,\xi\rangle))\omega(\xi)$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\sum_l r_{\lambda+\mu+l}(x,\sqrt{-1}\xi)\Phi_{\lambda+\mu+l+n}(\sqrt{-1}\langle x-y,\xi\rangle)\omega(\xi)$$

となり求める結果を得る． （証終）

注意． ここで用いたのと同様の議論により(一つ体積要素 $dx=dx_1\cdots dx_n$ を定めて)擬微分作用素 $P(x,D_x)=\sum_j p_{\lambda+j}(x,D_x)$ の(第3章第4節定義3.4.3の意味での)共軛作用素 $P^*(x,D_x)\equiv\sum_k q_{\lambda+k}(x,D_x)$ を考える時，

$$q_{\lambda+k}(x,-\sqrt{-1}\xi)=\sum_{k=j-|\alpha|}\frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\left(\frac{1}{\sqrt{-1}}D_\xi\right)^\alpha D_x^\alpha p_{\lambda+j}(x,\sqrt{-1}\xi)$$

が成り立つことを示すことができる(これは，定義3.4.3の後の補題4 (ii) を擬微分作用素に拡張したものである)．

今，T^*X 上の正則函数であってファイバー変数 ξ に関して λ 次斉次のものの作る層を $\mathcal{O}(\lambda)$ と記すことにしよう．この時，$\sum_j p_{\lambda+j}(x,D_x)$ に対して $p_\lambda(z,\zeta)$ を対応させることにより，$\mathcal{E}(\lambda)$ より $\mathcal{O}(\lambda)$ への準同型写像 σ_λ を得る．線型微分作用素の場合と同じく $\sigma_\lambda(P)$ を P の**主要表象**と呼ぶ．この時，定理4.1.1により次の結果が得られることは見易い．

定理 4.1.2. (i) $P\in\mathcal{E}(\lambda)$, $Q\in\mathcal{E}(\mu)$ の時 $PQ\in\mathcal{E}(\lambda+\mu)$ であり，$\sigma_{\lambda+\mu}(PQ)=\sigma_\lambda(P)\sigma_\mu(Q)$ が成立する．

(ii) $P\in\mathcal{E}(\lambda)$, $Q\in\mathcal{E}(\mu)$ ならば，$[P,Q]\in\mathcal{E}(\lambda+\mu-1)$ であり

$$\sigma_{\lambda+\mu-1}([P,Q])=\frac{1}{\sqrt{-1}}\{p_\lambda(x,\sqrt{-1}\,\xi),\ q_\mu(x,\sqrt{-1}\,\xi)\}$$

$$\left(=\frac{1}{\sqrt{-1}}\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial}{\partial\xi_j}p_\lambda(x,\sqrt{-1}\xi)\frac{\partial}{\partial x_j}q_\mu(x,\sqrt{-1}\,\xi)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\partial}{\partial\xi_j}q_\mu(x,\sqrt{-1}\,\xi)\frac{\partial}{\partial x_j}p_\lambda(x,\sqrt{-1}\,\xi)\right)\right)^{*)}$$

---

*) この量を p_λ と q_μ のポアソン括弧式と呼ぶのであった(第3章第5節)．

ここで，$\mathcal{E}(\lambda)$ は非可換環の層であるが，$\mathcal{O}(\lambda)$ は可換環の層であることに注意しよう．我々は以下で，如何に $\mathcal{O}(\lambda)$ と云う可換なものから得られる情報によって擬微分方程式の構造が規定されるかを調べて行く．その前にまず，擬微分作用素のクラスが，座標変換で変らぬことを示そう．

X の二つの座標系 $x=(x_1, \cdots, x_n)$ と $\tilde{x}=(\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_n)$ をとり，$x=\varphi(\tilde{x})$, $\tilde{x}=\tilde{\varphi}(x)$ とおく．$P(x, D_x)=\sum_j p_{\lambda+j}(x, D_x)$ を $(x_0, \sqrt{-1}\,\xi_0\infty)$ の近傍で定義された擬微分作用素とする．$(\tilde{x}_0, \sqrt{-1}\tilde{\xi}_0)$ を $(x_0, \sqrt{-1}\xi_0)$ と対応する $\sqrt{-1}\,T^*X$ の点とする．従って

$$(\tilde{\xi})_j=\sum_k \frac{\partial x_k}{\partial \tilde{x}_j}(\xi)_k$$

が満たされる．

さて，定義により

$$P(x, D_x)\,\delta(x-y)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int K(x, y, \xi)\,\omega(\xi)$$

(但し，$K(x, y, \xi)=\sum_j p_{\lambda+j}(x, \sqrt{-1}\,\xi)\,\Phi_{\lambda+j}(\sqrt{-1}(\langle x-y, \xi\rangle+\sqrt{-1}\,0)))$ であった．今，$|\det \partial x/\partial \tilde{x}|$ を $j(\tilde{x})$ とおけば

$$\delta(x-y)=j(\tilde{y})\delta(\tilde{x}-\tilde{y})$$

である．但し，ここで $\tilde{x}=\varphi(x)$, $\tilde{y}=\varphi(y)$ である．従って

$$P(x, D_x)\delta(x-y)=P(x, D_x)\delta(\tilde{x}-\tilde{y})j(\tilde{y})$$

故,

(4.1.17) $$P(x, D_x)\delta(\tilde{\varphi}(x)-\tilde{\varphi}(y))=j(\tilde{y})^{-1}P(x, D_x)\delta(x-y)$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int j(\tilde{\varphi}(y))^{-1}\sum_j p_{\lambda+j}(x, \sqrt{-1}\,\xi)\Phi_{\lambda+j}(\sqrt{-1}(\langle x-y, \xi\rangle)+\sqrt{-1}\,0)\omega(\xi)$$

となる．一方

$$\langle x-y, \xi\rangle=\langle \varphi(\tilde{x})-\varphi(\tilde{y}),\ \tilde{\Xi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \xi)\rangle$$

と書ける．但し，ここで $\tilde{\Xi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \xi)$ は n-ベクトルであり

$$\tilde{\Xi}_k(\tilde{x}, \tilde{y}, \xi)=\sum_j \frac{\partial x_k}{\partial \tilde{x}_j}\xi_j$$

を満たす．従って，$\tilde{\xi}=\tilde{\Xi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \xi)$ は ξ について解けて，$\xi=\Xi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\xi})$ を得る．従って

$$\Xi_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\xi})=\sum_k \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_k}\tilde{\xi}_k$$

である．ここで $\tilde{\xi}=\tilde{\Xi}(\tilde{x},\tilde{y},\xi)$ と変数変換すれば，

$$\omega(\tilde{\xi})=\left|\frac{\partial\tilde{\xi}}{\partial\xi}\right|\omega(\xi)$$

を得るから，(4.1.17) より

(4.1.18) $P(x,D_x)\delta(\tilde{x}-\tilde{y})=$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int j(\tilde{y})^{-1}(\sum_j p_{\lambda+j}(x,\sqrt{-1}\xi)\times$$
$$\times\Phi_{\lambda+j}(\sqrt{-1}(\langle\tilde{x}-\tilde{y},\tilde{\xi}\rangle+\sqrt{-1}0)))\,|\partial\tilde{\xi}/\partial\xi|^{-1}\omega(\tilde{\xi})$$

(但し，$\xi=\Xi(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{\xi})$，$x=\varphi(\tilde{x})$)

今

$$r_{\lambda+j}(\tilde{x},\tilde{y},\sqrt{-1}\,\tilde{\xi})=j(\tilde{y})^{-1}|\partial\tilde{\xi}/\partial\xi|^{-1}p_{\lambda+j}(x,\sqrt{-1}\,\xi)$$

と置けば，

$P(x,D_x)\ \delta(\tilde{x}-\tilde{y})=$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int(\sum_j r_{\lambda+j}(\tilde{x},\tilde{y},\sqrt{-1}\,\tilde{\xi})\Phi_{\lambda+j}(\sqrt{-1}\langle\tilde{x}-\tilde{y},\tilde{\xi}\rangle+\sqrt{-1}\,0))\omega(\tilde{\xi})$$

を得る．よって，この最後の積分が

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int(\sum_j\tilde{p}_{\lambda+j}(\tilde{x},\sqrt{-1}\,\tilde{\xi})\Phi_{\lambda+j}(\sqrt{-1}(\langle\tilde{x}-\tilde{y},\tilde{\xi}\rangle))\omega(\tilde{\xi})$$

と書けることが言えれば，$P(x,D_x)$ が座標変換で $\sum_j\tilde{p}_{\lambda+j}(\tilde{x},D_{\tilde{x}})$ に移ることになる．ここで

$$r_{\lambda+j}(\tilde{x},\tilde{x},\sqrt{-1}\,\tilde{\xi})=p_{\lambda+j}(x,\sqrt{-1}\,\xi)$$

が成り立つことに注意しておこう．

定理 4.1.3. $a_{\lambda+j}(x,y,\sqrt{-1}\,\xi)$ $(j\in\boldsymbol{Z})$ が増大度条件 (4.1.2) および (4.1.3) を満たすとする．そのような $a_{\lambda+j}$ を用いて $p_{\lambda+j}$ を

(4.1.19) $$p_{\lambda+j}(x,\sqrt{-1}\xi)=\sum_{j=k-|\alpha|}\frac{1}{\alpha!}D_y^\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{-1}}D_\xi\right)^\alpha a_{\lambda+k}(x,y,\sqrt{-1}\,\xi)|_{x=y}$$

により定める．この時，次の事実が成立する．

(i) $$\int\sum_j a_{\lambda+j}(x,y,\sqrt{-1}\xi)\Phi_{\lambda+j+n}(\sqrt{-1}(\langle x-y,\xi\rangle+\sqrt{-1}\,0))\omega(\xi)$$
$$=\int\sum_j p_{\lambda+j}(x,\sqrt{-1}\xi)\Phi_{\lambda+j+n}(\sqrt{-1}(\langle x-y,\xi\rangle+\sqrt{-1}\,0))\omega(\xi)$$

(ii) 更に $a_{\lambda+j}=0$ $(j>0)$ ならば，$p_\lambda(x,\sqrt{-1}\xi)=a_\lambda(x,x,\sqrt{-1}\xi)$ である．

［証明］ まず $c_{\lambda+j}^\alpha(x,\sqrt{-1}\,\xi)=D_y^\alpha a_{\lambda+j}(x,y,\sqrt{-1}\,\xi)|_{y=x}$ と定め，

$$a_{\lambda+j}(x, y, \sqrt{-1}\xi) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}(y-x)^\alpha c^\alpha_{\lambda+j}(x, \sqrt{-1}\xi)$$

と Taylor 展開する．その時

$$\int (\sum_j a_{\lambda+j}(x, y, \sqrt{-1}\xi)\Phi_{\lambda+j+n}(\sqrt{-1}(\langle x-y, \xi\rangle + \sqrt{-1}\,0)))\omega(\xi)$$
$$= \int (\sum_{j,\alpha} \frac{1}{\alpha!} c^\alpha_{\lambda+j}(x, \sqrt{-1}\xi)(y-x)^\alpha \Phi_{\lambda+j+n}(\sqrt{-1}(\langle x-y, \xi\rangle + \sqrt{-1}\,0)))\omega(\xi)$$
$$= \int (\sum_{j,\alpha} \frac{1}{\alpha!} c^\alpha_{\lambda+j}(x, \sqrt{-1}\xi)(\sqrt{-1}D_\xi)^\alpha \Phi_{\lambda+j+n-|\alpha|}(\sqrt{-1}(\langle x-y, \xi\rangle + \sqrt{-1}\,0)))\omega(\xi)$$
$$= \int (\sum_{j,\alpha} \frac{1}{\alpha!} c^\alpha_{\lambda+j+|\alpha|}(x, \sqrt{-1}\xi)(\sqrt{-1}D_\xi)^\alpha \Phi_{\lambda+j+n}(\sqrt{-1}(\langle x-y, \xi\rangle + \sqrt{-1}\,0)))\omega(\xi)$$

を得る．ここで命題4.1.5の証明と同様にして ξ について部分積分ができることが示せるから(証明は読者に委ねる)，この積分は

$$\int \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}((-\sqrt{-1}D_\xi)^\alpha c^\alpha_{\lambda+j+|\alpha|}(x, \sqrt{-1}\xi)) \times$$
$$\times \Phi_{\lambda+j+n}(\sqrt{-1}(\langle x-y, \xi\rangle + \sqrt{-1}\,0)))\omega(\xi)$$

に等しい．これは式 (4.1.19) にほかならない．　　(証終)

こうして，擬微分作用素のクラスが座標変換不変であることが示された．

さて今，$P(x, D_x) = \sum_j p_{\lambda+j}(x, D_x)$ が $\mathscr{E}(\lambda)$ に属する (即ち $p_{\lambda+j}=0$ $(j>0)$) としよう．その時座標変換 $x=\varphi(\tilde{x})$ により $P(x, D_x)$ から得られた作用素 $\tilde{p}(\tilde{x}, D_{\tilde{x}})$ は定理 4.1.3(ii) により $\mathscr{E}(\lambda)$ に属し，しかも

$$\tilde{p}_\lambda(\tilde{x}, \sqrt{-1}\,\tilde{\xi}) = r_\lambda(\tilde{x}, \tilde{x}, \sqrt{-1}\,\tilde{\xi}) = p_\lambda(x, \sqrt{-1}\,\xi)$$

を満足する．従って，$P=\sum_{j\le 0} p_{\lambda+j} \mapsto p_\lambda$ によって定義された準同型

$$\sigma_\lambda:\ \mathscr{E}(\lambda) \to \mathscr{O}(\lambda)$$

は座標変換不変である．

さて，以下では本書の中心目標である擬微分方程式の構造理論を展開する為に必要とされる擬微分作用素の基本的性質のいくつかについて考察を行う．擬微分作用素の解析において，常に面倒なのが $\sum_j p_{\lambda+j}(x, D_x)$ という形に形式解を求めて後，各斉次部分 $p_{\lambda+j}(x, \xi)$ が増大度条件 (4.1.6 a)，(4.1.6 b) を満たすことを確かめることである．この為の補助手段として比較的便利なのが Boutet de Monvel-Krée[1] によって導入された次の形式ノルム $N_l^\omega(P;t)$ である．以下簡単の為 $\lambda=0$ に話を限ることとしておく．

定義 4.1.2. $(x^0, \sqrt{-1}\,\xi^0\infty)$ を $\sqrt{-1}S^*M$ の点，ω をその複素近傍とする．また，$\dim M=n$ とする．今，高々 l 階の擬微分作用素 $P(x, D_x) = \sum_{j=-\infty}^{l} p_j(x, D_x)$

($p_j(x,\xi)$ は ξ に関して j 次斉次)において，すべての $p_j(z,\zeta)$ が ω での正則函数を定めているとする．この時，$P(x,D_x)$ の ω での**形式ノルム** $N_l^\omega(P;t)$ とは次の (t に関する)形式和のことを謂う：

(4.1.20) $$\sum_{k,\alpha,\beta}\frac{2(2n)^{-k}k!}{(|\alpha|+k)!(|\beta|+k)!}\sup_\omega|D_x^\alpha D_\xi^\beta p_{l-k}(z,\zeta)|t^{2k+|\alpha+\beta|}$$

命題 4.1.6. 或る $\varepsilon>0$ に対し $N_l^\omega(P;\varepsilon)<\infty$ ならば，増大度条件 (4.1.6 a) が満たされる．また，$\{p_j(z,\zeta)\}_{-\infty<j\leq l}$ が ω で (4.1.6 a) を満たしていれば，適当な $\omega'(\subset\omega)$ と $\varepsilon>0$ に対し $N_l^{\omega'}(P;\varepsilon)<\infty$ が成立する．

証明は殆ど明らかである．後半はコーシーの積分公式を用いて，p_j の微係数の評価を $\sup_\omega|p_j|$ を用いて行えばよい．

注意．以下誤解がない限り p_j の定義域 ω は略して $N_l(P;t)$ を略記することが多い．

さて，形式ノルムの有用性は主として次の定理に起因する．

定理 4.1.5. (Boutet de Monvel-Krée [1])

$$P_1=\sum_{j=-\infty}^{l_1}p_j^{(1)},\quad P_2=\sum_{j=-\infty}^{l_2}p_j^{(2)}$$

とし，$p_j^{(1)}$，$p_j^{(2)}$ はすべて ω で定義されているとする．この時

(4.1.21) $$N_{l_1+l_2}^\omega(P_1P_2;t)\ll N_{l_1}^\omega(P_1;t)N_{l_2}^\omega(P_2;t)$$

が成り立つ．ここで，t に関する形式的巾級数 $A(t)$，$B(t)$ に対し，
記号 $A(t)\ll B(t)$ は $B(t)$ が $A(t)$ の優級数であることを意味する．

証明は原論文 Boutet de Monvel-Krée [1] 補題 1.2. を参照して頂くこととして，ここでは省略する．

この定理の威力を示すのが，次の定理 4.1.6 ならびにその系である．

定理 4.1.6. $f(s)=\sum_{k=0}^\infty f_ks^k$ を，$s=0$ の近傍で定義された正則函数とする．今，$(x^0,\sqrt{-1}\,\xi^0\infty)\in\sqrt{-1}S^*M$ の近傍で定義された高々 0 階の擬微分作用素 $P(x,D_x)$ が次の条件 (4.1.22) を満たすとする．

(4.1.22) $$\sigma_0(P)(x^0,\sqrt{-1}\,\xi^0)=0$$

この時，$f(P)=\sum_{k=0}^\infty f_kP^k$ は $(x^0,\sqrt{-1}\,\xi^0\infty)$ の近傍で定義された(高々 0 階の)擬微分作用素を定める．

［証明］ 定理 4.1.5 により

$$N_0^\omega(f(P);t)=\sum_{k=0}^{\infty}f_kN_0^\omega(P^k;t)\ll\sum_{k=0}^{\infty}f_kN_0^\omega(P;t)^k$$

が成立する．ここで仮定 (4.1.22) により，如何なる $\delta>0$ に対しても，ω と $\varepsilon>0$ を十分小さく取れば，$N_0^\omega(P;\varepsilon)<\delta$ が成立するから，命題 4.1.6 により求める結果を得る．　(証終)

系．有限階の擬微分作用素 $P(x, D_x)$ に対して，その主要表象 $\sigma_m(P)(x, \sqrt{-1}\xi)$ が $\Omega\subset\sqrt{-1}S^*M$ で決して消えないなら，Ω で定義された擬微分作用素 E が存在して

(4.1.23)　$PE=EP=I$

が成立する．

［証明］ (4.1.23) を満たす E は局所的にも一意故，E の存在を Ω の各点の近傍で証明すれば十分である．さて，$q_{-m}(x, \sqrt{-1}\xi)$ を $p_m(x, \sqrt{-1}\xi)^{-1}$ により定めて

(4.1.24)　$R(x, D_x)=I-P(x, D_x)\,q_{-m}(x, D_x)$

と定めれば，$R(x, D_x)$ は定理 4.1.6 の仮定を満たしている．従って $\sum_{k=0}^{\infty} R(x, D_x)^k$ は擬微分作用素 $S(x, D_x)$ を局所的に定める．然るに $(I-R)S=I$ が Sの定義より成立するから，$q_{-m}(x, D_x)\,S(x, D_x)$ は P の右逆作用素となっている．同様にして，P の左逆作用素も擬微分作用素として局所的には求めることができる．さて擬微分作用素に対して結合律が成立することより，P の左右両逆作用素は一致する．従って $q_{-m}S=E$ と取ればよい．(証終)

注意．この系の証明と同様にして次の事実を示すことも容易である：

$P(x, D_x)=(P_{ij}(x, D_x))_{1\leq i,j\leq N}$ を擬微分作用素の $N\times N$ 行列とする．$\max_{1\leq i\leq N}\operatorname{ord}P_{ij}$ を m_j と定める．今，$\det(\sigma_{m_j}(P_{ij}))$ が $\Omega\subset\sqrt{-1}S^*M$ で決して消えないなら，Ω で定義された擬微分作用素の $N\times N$ 行列 E が存在して

(4.1.25)　$PE=EP=I$

を満たす．*)

上述の系により，問題を超局所的に考える限り，擬微分方程式 $Pu=0$ の構造は $V_R=\{(x, \sqrt{-1}\xi\infty)\in\sqrt{-1}S^*M\,|\,\sigma_m(P)(x, \sqrt{-1}\xi)=0\}$ の外では自明で

*) やや中途半端な結果であるが，以下ではこれ以上のことを必要としないので，ここでは余り深入りしないこととする．

ある．従って，我々の次の目標は，$\sigma_m(P)=0$ となる所での擬微分方程式の構造を明らかにすることとなる．実は本章第3節で示すように，事態は，一般点においては，過剰決定系に対してすら，極めて簡明である．即ち，標語的に言うなら，我々は，擬微分方程式を恰も代数方程式であるかの如く扱うことができる．勿論，こう言い切ってしまう為には，いくつかの準備が必要とされる．その一つとして，多変数解析函数の局所理論において基本的なシュペート(Späth) の定理およびワイエルシュトラス (Weierstrass) の予備定理に対応する定理を以下に紹介しよう．証明はかなり面倒なので紙数の関係もあってここでは省略することとする．

定理 4.1.7.（擬微分作用素に対する Späth の定理 I） $P(x, D_x)$ を m 階の擬微分作用素であって次の条件 (4.1.26) を満たすものとする．

(4.1.26)　$(\sigma_m(P)(x, \sqrt{-1}\xi)/\xi_n{}^p)|_{(x;\xi)=(0;1,0,\cdots,0,\xi_n)}$ は ξ_n の函数として，$\xi_n=0$ の近傍で正則であり，かつ0にならない．

この時，$(x; \sqrt{-1}\xi)=(0; \sqrt{-1}(1, 0, \cdots, 0))$ の近傍 ω において，任意の擬微分作用素 $S(x, D_x)$ に対し，ある擬微分作用素 $Q(x, D_x)$ と $R(x, D_x)$ が存在して次の (4.1.27) 及び (4.1.28) の形の除法定理が成り立つ．この時，Q, R は一意的である．また，S が有限階であれば，Q, R も有限階である．

(4.1.27)　$S(x, D_x)=Q(x, D_x)P(x, D_x)+R(x, D_x)$

(4.1.28)　$[\underbrace{x_n, [\cdots\cdots, [x_n,}_{p} R]\cdots]=0$,　即ち，$R(x, D_x)$ は $\sum_{j=0}^{p-1} R^{(j)}(x, D')D_n{}^j$ $(D'=(D_1, \cdots, D_{n-1}))$ と云う表示を持つ．

定理 4.1.8.（擬微分作用素に対する Späth の定理 II） $P(x, D_x)$ が (4.1.26) の代わりに次の条件 (4.1.29) を満たすとする．

(4.1.29)　$(\sigma_m(P)(x, \sqrt{-1}\xi)/x_1{}^p)|_{(x;\xi)=(x_1,0;\xi^0)}$ は x_1 の函数として，$x_1=0$ の近傍で正則，かつ0にならない．

この時，任意の擬微分作用素 $S(x, D_x)$ に対し，次の形の除法が一意的に可能である．

(4.1.30)　$S(x, D_x)=Q(x, D_x)P(x, D_x)+R(x, D_x)$

(4.1.31)　$[\underbrace{D_1, [\cdots, [D_1,}_{p} R]\cdots]=0$,　即ち，$R(x, D_x)$ は $\sum_{j=0}^{p-1} x_1{}^j R^{(j)}(x', D)$ $(x'=(x_2, \cdots, x_n))$ と云う表示を持つ．

これ等の証明については，S-K-K[1] 第2章 §2.2 を参照されたい．また，定理 4.1.7 の系として，次の **Weierstrass 型の除法定理**を得ることができるのは，函数論におけると同様である．

定理 4.1.9. $P(x, D_x)$ を m 階の擬微分作用素であって (4.1.26) を満たすものとする．この時，$(x, \sqrt{-1}\xi)=(0; \sqrt{-1}(1, 0, \cdots, 0)$ の近傍 ω において次の分解 (4.1.32) が可能である．

(4.1.32)　$P(x, D_x)=Q(x, D_x)\ W(x, D_x)$

但し，ここで $Q(x, D_x)$ は ω で可逆であり，W は次の形を持つ：

(4.1.33)　$W(x, D_x)=D_n{}^p+\sum_{j=0}^{p-1} W^{(j)}(x, D')D_n{}^j \quad (D'=(D_1, \cdots, D_{n-1})),$

$W^{(j)}(x, D')$ は高々 $(p-j)$ 階であって $\sigma_{p-j}(W^{(j)})(0, \sqrt{-1}(1, 0, \cdots, 0))=0.$

多変数解析函数の局所理論において Späth の定理が基本的であったのと同様擬微分方程式の局所理論において，これ等の定理により，問題の作用素を適宜正規化して論じることは，基本的な手法である．

§2.　擬微分作用素の量子化(された)接触変換*)

前節において，線型微分作用素の概念を $\sqrt{-1}S^*M$ 上‘超局所化’することにより，擬微分作用素の概念を得ることを示した．他方，我々は既に第3章第6節において，微分方程式の解の特異性の“運び手”としての陪特性帯の役割を認識し，そこで，接触幾何学と微分方程式論の交錯を期待した．本節の目標は，この夢の実現，即ち“擬微分作用素の接触変換”を試みることにある．このような問題意識をかなりはっきりと定式化したのは Maslov [1] に始まるようであるが，同書が(ソ連邦以外の)数学者には余り知られなかったことと，同書の叙述が数学的には余り厳密でなかったこと（元来は，物理学者の為の書であったのであろう）とが相俟って，数学者がそのような接近を試みるように

*)　“Quantized contact transformation” の訳であるが，やや冗長なので，以下，‘量子化(接触)変換’と略することが多い．以下に解説するように，‘幾何学的変換’に対応する‘作用素の変換’と云う意味で“Quantized”と呼んでみたのであるが，(後述，定理 4.2.2 の証明の後の注意も参照)余り良くない用語かも知れない．Hörmander [3] はこれに相当する変換を“Fourier integral operator”と呼んでいるが，これも余り良い用語とは思われない．

なったのは Egorov [1] に接して以来，と言ってもよいであろう．現在では，この手法は線型微分方程式論においては不可欠のものとなっている．

本論に入る前に，簡単に接触幾何学の基本概念を復習しておこう．以下多様体 X は複素解析的とする．X が実多様体の場合は T^*X その他はすべて実の範囲で考え，'$\boldsymbol{C}^\times=\boldsymbol{C}-\{0\}$ の作用' とある部分を $\boldsymbol{R}^\times_+=\{t\in\boldsymbol{R}\,|\,t\gneqq 0\}$ の作用と置き換えれば，議論は全く同じである．

定義 4.2.1. $(2n-1)$-次元多様体 X の余接ベクトル束 T^*X の 1 次元部分ベクトル束 L^*†)が次の条件 (4.2.1) を満たす時，(X, L) を X 上の**接触構造**と呼ぶ．

(4.2.1)　どの点でも 0 でない，L^* の局所的断面 ω に対して，$\omega\wedge(d\omega)^{n-1}$ はどこでも 0 ではない*)．

定義 4.2.2. 定義 4.2.1 の ω を X 上の**正準型式** (canonical 1-form) と呼ぶ．

さて，L^* から L^* の零断面 $(\simeq X)$ を引いた残りを $\hat{X}$ と記せば，$\hat{X}$ は$\boldsymbol{C}^\times=\boldsymbol{C}-\{0\}$ の作用する X 上の $\boldsymbol{C}^\times$-主束となる．$\hat{X}$ の断面 s に対して $s^*(\theta)=\omega$ となる θ をとることにより $\hat{X}$ 上に 1-型式 θ を自然に定義できる．この時，$(d\theta)^n$ は $\hat{X}$ のどこでも 0 とはならない．$\hat{X}$ を X に付随した**シンプレクティック** (symplectic) **多様体**，θ を一次斉次正準型式と呼ぶ．また，$\hat{X}$ の(ある開集合で定義された) 函数 $f(z)$は，$f(az)=a^m f(z)$ $(a\in\boldsymbol{C}^\times,\ z\in\hat{X})$ を満たす時，m 次斉次函数と呼ばれる．この場合，f は X 上の m 次斉次函数である，とも謂う．X 上の m 次斉次函数の層は $L^{\otimes m}$ と同型である．

以上の定義は，n 次元多様体 Y の余接射影束 P^*Y を X として考えれば具体的に理解されよう．この場合，$\hat{X}=T^*Y-Y$ となる．実際，古典的な**ダルブー** (Darboux) **の定理**は，X の局所座標系 $(x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_{n-1})$ を適当に選べば，$\omega=dx_n-p_1dx_1-\cdots-p_{n-1}dx_{n-1}$ が正準型式に取れることを主張している．この時，$(x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_{n-1})$ を X の**正準座標**と呼ぶ．又，この時 $\hat{X}$ の座標系 $(x_1, \cdots, x_n, \eta_1, \cdots, \eta_n)$ を $p_j=-\eta_j/\eta_n\ (j=1, \cdots, n-1)$, $\theta=\eta_n\omega=\eta_1dx_1+\cdots+\eta_ndx_n$ となるように取れることは明らかである．この $(x_1, \cdots, x_n, \eta_1, \cdots, \eta_n)$ を

---

†)　L^* は L の双対束を表わす．

*)　$(f\omega)\wedge(d(f\omega))^{n-1}=f^n\omega\wedge(d\omega)^{n-1}$ であるから，この条件は ω のとり方によらないことに注意．

X の斉次正準座標と呼ぶ．

第3章第5節で導入された Poisson 括弧式は，接触構造を用いて次のように intrinsic に定義される．

定義 4.2.3. $2n$ 次元シンプレクティック多様体 $\hat{X}$ 上の函数 f, g の Poisson 括弧積 $\{f, g\}$ は次のように定められる：

(4.2.2)　$ndf\wedge dg\wedge(d\theta)^{n-1}=\{f, g\}(d\theta)^n$

問. $\hat{X}$ の斉次正準座標 $(x_1, \cdots, x_n,\ \eta_1, \cdots, \eta_n)$ を用いれば，Poisson 括弧積 $\{f, g\}$ が

(4.2.2′)　$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial\eta_j}\frac{\partial g}{\partial x_j}-\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial\eta_j}\right)$$

と書けることを確かめよ．(第3章第5節ではこの形で Poisson 括弧積を導入したのであった.)

Poisson 括弧積 $\{f, g\}$ が次の関係式を満たすことは (4.2.2′) より自明であろう．

定理 4.2.1.

(4.2.3)　$\{f, g\}=-\{g, f\}$

(4.2.4)　$\{\{f, g\}, h\}+\{\{g, h\}, f\}+\{\{h, f\}, g\}=0$

(4.2.5)　f が l 次斉次，g が m 次斉次ならば $\{f, g\}$ は $(l+m-1)$ 次斉次である．

Poisson 括弧積と関係して，**ハミルトン** (Hamilton) **ベクトル場**と呼ばれる $\hat{X}$ 上のベクトル場

(4.2.6)　$$H_f=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial\eta_j}\frac{\partial}{\partial x_j}-\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial\eta_j}\right)$$

も重要である．特に，第3章§6定義 3.6.1 で導入された陪特性帯なる概念を，Hamilton ベクトル場の言葉を用いて言い換えれば，陪特性帯とは H_{p_m} の積分曲線に他ならない．この言い換えは，陪特性帯が，接触幾何学において意味のある概念であることを明示して重要である．なお，Poisson 括弧積と H_f の定義より

(4.2.7)　$H_{\{f, g\}}=[H_f, H_g]\ (\underset{\text{def}}{=}H_fH_g-H_gH_f)$

が成り立つことは明らかである．

以上の議論においては，X 上の正準型式 ω から出発して X 上の接触構造を定め，更に，シンプレクティック多様体 $\hat{X}$ 上に一次斉次正準型式 θ_X を ω から自然に定まる物として定義した．ここで，実は，逆に X 上の $\boldsymbol{C}^\times$-主束 S とその上で次の条件 (4.2.8)，(4.2.9) を満たす 1-型式 θ が与えられれば，それから出発して X 上に接触構造を定め得ることを注意しておこう．

(4.2.8) $(d\theta)^n$ は S 上のどこでも消えない．

(4.2.9) θ は斉次である．即ち，或る整数 r があって $\theta(cx)=c^r\theta(x)$ $((c, x)\in \boldsymbol{C}^\times\times S)$ が成立する．

実際，正準型式 ω としては，S の任意の断面 s に対し，$s^*\theta$ をとれば十分であることは容易に確かめ得る．なお，この時，$r=1$ ならば S と $\hat{X}$ は一致する．一般の r の場合には，$\hat{X}=S^{\otimes r}$ となる．即ち，θ_X を $\hat{X}$ 上の一次斉次正準型式とする時主束 S から主束 $\hat{X}$ への写像 F であって $F(cx)=c^rF(x)$ かつ $\theta=F^*\theta_X$ となるものが存在する．このようにして接触構造を定義する一例として，次の例に触れておこう．

例 4.2.1. V を $2n$ 次元のシンプレクティック線型空間とする．即ち，線型空間 V 上に歪対称非退化二次型式 $E(v_1, v_2)$ が与えられているものとする．$X=P(V)=(V-\{0\})/\boldsymbol{C}^\times$ と定義しよう．今，V 上に 1-型式 θ を $E(v, dv)/2$ で定義すれば，$(d\theta)^n$ が非退化になることは，E が非退化であることから容易に判る．明らかに，$\theta(cv)=c^2\theta(v)$ $((c, v)\in\boldsymbol{C}^\times\times(V-\{0\}))$ が成立するから，$P(V)$ は θ から導かれる接触構造を持つことになる．

以下，接触構造に関連したいくつかの基本的な概念を復習しておこう．

定義 4.2.4. X, Y を二つの同次元接触多様体とする．X から Y への写像 φ は，Y 上の任意の正準型式 ω_Y に対して $\varphi^*\omega_Y$ がX上の正準型式となる時，**接触変換**と呼ばれる．

例 4.2.2. M, N を $\boldsymbol{C}^n$ 内の開集合とし，$M\times N$ 上で定義された正則函数 $\Omega(x, y)$ $(x\in M,\ y\in N)$ を考える．今，$\Omega(x, y)$ が次の条件 (4.2.10) および (4.2.11) を満たしているとしよう．

(4.2.10) $H=\{(x, y)\in M\times N\,|\,\Omega(x, y)=0\}$ は非特異，即ち，H 上で $\mathrm{grad}_{(x,y)}\Omega(x, y)\neq 0$.

$$\text{(4.2.11)}\quad H\text{ 上で}\det\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\partial\Omega}{\partial y_1}\cdots\cdots\cdots & \dfrac{\partial\Omega}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial y_1\partial x_1} \cdots & \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial y_n\partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial x_n} & \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial y_1\partial x_n} \cdots & \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial y_n\partial x_n} \end{pmatrix} \neq 0$$

この時，P^*M と P^*N の局所同形を次のように，

$$P^*_H(M\times N)=\{(x,y;\xi,\eta)\in P^*(M\times N)\,|\,\Omega(x,y)=0,$$
$$(\xi,\eta)=c\,\mathrm{grad}_{(x,y)}\Omega(x,y)\ \ (c\neq 0)\}$$

を経由して定めることができる：

まず陰函数の定理により，$P^*_H(M\times N)\xrightarrow{p}P^*M$ なる射影は局所同形である．$\left(\det\begin{pmatrix}0 & d_y\Omega \\ d_x\Omega & cd_xd_y\Omega\end{pmatrix}=c^{n-2}\det\begin{pmatrix}0 & d_y\Omega \\ d_x\Omega & d_xd_y\Omega\end{pmatrix}\text{に注意.}\right)$
同様にして，$P^*_H(M\times N)\xrightarrow{q}P^*N$ も局所同形である．この p，q により $p\circ q^{-1}$: $P^*N\to P^*M$，$q\circ p^{-1}$: $P^*M\to P^*N$ なる局所同型を定める．この時 H 上では $d\Omega=\sum_{j=1}^{n}\dfrac{\partial\Omega}{\partial x_j}dx_j+\sum_{j=1}^{n}\dfrac{\partial\Omega}{\partial y_j}dy_j\neq 0$ が成立するから，明らかに $p\circ q^{-1}$ および $q\circ p^{-1}$ は接触変換である．

定義 4.2.5. 上のようにして定まる接触変換を，“Ω を**母函数**として持つ接触変換”と呼ぶ．

注意. 任意の接触変換は，母函数を持つ適当な接触変換を二度繰り返すことによって得られることが古典的結果として知られている．この意味において，母函数を持つ接触変換は“generic”な接触変換である．

例 4.2.3. 古典的に有名なルジャンドル (Legendre) 変換はその母函数を $\Omega(x,y)=x_n-y_n+\sum_{j=1}^{n-1}x_jy_j$ として定められる接触変換である．この時，(x,ξ) と (y,η) の対応を具体的に書き下せば次のようになる．

$$\text{(4.2.12 a)}\quad \begin{cases} x_j=-\eta_j\eta_n{}^{-1} & (j<n) \\ x_n=\langle y,\eta\rangle\eta_n{}^{-1} & \\ \xi_j=y_j\eta_n & (j<n) \\ \xi_n=\eta_n & \end{cases}$$

(4.2.12 b)
$$\begin{cases} y_j=\xi_j\xi_n^{-1} & (j<n) \\ y_n=\langle x,\xi\rangle\xi_n^{-1} & \\ \eta_j=-x_j\xi_n & (j<n) \\ \eta_n=\xi_n & \end{cases}$$

例 4.2.4. 例 4.2.1 において V 上の歪対称非退化型式 E を用いて $P(V)$ に接触構造を与えた．この時，V の線型変換 φ であって $E(v_1,v_2)=E(\varphi v_1,\varphi v_2)$ を満たすもの(即ち (V,E) のシンプレクティック変換)を考えれば，そこで定義された 1-型式 θ は φ で不変であるから，φ は X の接触変換を定義する．

定義 4.2.6. 接触多様体 X の解析的部分集合 V が次の条件 (4.2.13) を満たす時，V を**包合的** (involutory, involutive)*) と呼ぶ．

(4.2.13) $f|_V=g|_V=0$ ならば $\{f,g\}|_V=0$.

注意 1. 本書の程度を超えるのでここでは証明しないが，任意の擬微分方程式系の特性多様体は包合的であることが知られている (S-K-K[1] Chapter II §5.3 Theorem 5.3.2)．この事実は線型微分方程式論で極めて基本的かつ重要である．なお，そこに与えられている証明は極めて超越的なものであるけれど，最近，より代数的な別証明が得られた(柏原 [2])．

注意 2. $(2n-1)$-次元接触多様体 X の包合的部分集合 V は，空でない限り，必ず余次元 n 以下である．

定義 4.2.7. X の包合的(非特異)部分多様体 V に対し，$\omega|_V\neq0$ が V の到る所で成立する時，V を**正則**と謂う．

定義 4.2.8. $(2n-1)$-次元接触多様体 X の包合的解析的集合 V の余次元が n である時，V を**ラグランジアン** (Lagrangian)**) と謂う．

注意 1. ラグランジアン多様体は定義 4.2.7 の意味で正則には決してならない．実際，X の余次元 n の多様体 Y について，Y がラグランジアンであると云うことと $\omega|_Y=0$ は同値であることが知られている．このことから，ラグラ

---

*) "Involutive" という語は英語として良い語感ではない，と云う説もあり．代わりに著者等は "involutory" を用いている．最も良いのは，"in involution" であろうが，形容詞的には使いにくいのが難点である．

**) やや混乱を起こし易い術語(特に場の理論に関連して)で余り適当な用語とは思われないが，今，一応慣用に従うこととする．

ンジアン部分集合は，包合的部分集合としては，極めて例外的なものであることが理解されよう．このことが逆に，ラグランジアン集合に関係した解析学*)が実り豊かであることを保証しているとも言えよう．この方向の研究は，極めて興味深く，また，目下進展中の話題が多いが，本書では触れない．他日を期したい．なお，王子セミナー報告集 (Publ. RIMS, Kyoto Univ. Vol. 12 supplement (1977)) はこの方面の話題を扱った報文を多く掲載していて有用かも知れない．

注意 2. Jacobi の理論により，任意の正則包合的多様体は，適当な正準座標系 (x, p) を選んで $p_1=\cdots=p_r=0$, $r<n$ と表わされる．又，ラグランジアン多様体は，適当な正準座標系 (x, p) を選んで，$x_1=\cdots=x_n=0$ と表わされる．

以上の幾何学的準備を土台に‘接触変換を量子化すること’，即ち，‘接触変換と両立する擬微分作用素の変換’を論じよう．定義 4.2.5 の後の注意により，我我は一般性を失うことなく，母函数を持つ接触変換に話を限定しても構わない．以下では説明の便宜の為，話を(複素解析的でなく)実解析的範疇に限定する．

定理 4.2.2. M, N を n 次元実解析的多様体，$\Omega(x, y)$ を $M\times N$ 上で定義された実数値実解析函数であって条件 (4.2.10)，(4.2.11) を満たしていると仮定しよう．この時，任意の擬微分作用素 $P(x, D_x)$ に対して

$$\int P(x, D_x)\delta(\Omega(x, y))u(y)dy=\int\delta(\Omega(x, y))Q(y, D_y)u(y)dy \tag{4.2.14}$$

なる関係式が任意の microfunction $u(y)$ に対して成り立つように擬微分作用素 $Q(y, D_y)$ を一意に定めることができる．逆に Q を与えれば，同様に (4.2.14) が成り立つように $P(x, D_x)$ を一意に定めることができる．更に，この時，P の階数と Q の階数は相等しい．

即ち

---

*) その特性多様体がラグランジアンになるような擬微分方程式系をホロノミック系 (holonomic system)，或いは**極大過剰決定系**，と呼ぶ．極大過剰決定系の最も基本的な性質の一つは，その (microfunction) 解空間の次元が有限次元になることで (柏原 [1]，柏原-河合 [4]) これにより，極大過剰決定系を函数の統制原理として研究を進めよう，と云う研究方向が現われた．このような考え方は佐藤(幹夫)先生による．

$$(4.2.15)\quad \begin{cases} q\circ p^{-1}\mathcal{E}_M(m)\simeq\mathcal{E}_N(m), & q\circ p^{-1}\mathcal{E}_M\simeq\mathcal{E}_N \\ p\circ q^{-1}\mathcal{E}_N(m)\simeq\mathcal{E}_M(m), & p\circ q^{-1}\mathcal{E}_M\simeq\mathcal{E}_N \end{cases}$$

が成り立つ.

更に (4.2.15) から自然に定義される.

$$(4.2.16)\quad q\circ p^{-1}\mathcal{A}_{\sqrt{-1}S^*M}\simeq\mathcal{A}_{\sqrt{-1}S^*N},$$

なる同型写像は，Ω を母函数とする接触変換に他ならない.

定義 4.2.8. 同型 (4.2.15) を(母函数 Ω を持つ)**量子化(された)接触変換**と呼ぶ*).

注意. 議論は以下，有限階の擬微作用素の層 $\mathcal{E}$ に対して行うが，そのままの証明が無限階の擬微分作用素の層 $\mathcal{E}^\infty$ の場合にも適用される.

〔定理 4.2.2 の証明〕 p, q が，H の余法束 $S^*_H(M\times N)$ を経由して定義されたことの延長として $\mathcal{E}_{M\times N}(m)\,\delta(\Omega(x, y))$ を経由して**)同型 (4.2.15) を証明することとしよう．即ち

$$(4.2.17)\quad p^{-1}\mathcal{E}_M(m)\simeq\mathcal{E}_{M\times N}(m)\delta(\Omega(x, y))$$

を証明しよう．条件 (4.2.10) により $M\times N$ 上で定義されたベクトル場の基 $\mathcal{X}_j$ $(1\leqq j\leqq 2n)$ を

$$(4.2.18)\quad [\mathcal{X}_j, \mathcal{X}_k]=0\quad (j, k=1, \cdots, 2n)$$

$$(4.2.19)\quad \begin{cases} \mathcal{X}_j\Omega=0 & (j=1, \cdots, 2n-1) \\ \mathcal{X}_{2n}\Omega=1 \end{cases}$$

となるように選ぶことができる．ここで $\mathcal{I}=\{P(x, y, D_x, D_y)\in\mathcal{E}_{M\times N}\mid P(x, y, D_x, D_y)\,\delta(\Omega(x, y))=0\}$ と定義すれば，$\mathcal{I}$ は $\mathcal{X}_1, \cdots, \mathcal{X}_{2n-1}$ 及び $(\Omega\mathcal{X}_{2n}-1)$ によって生成される．$\mathcal{I}$ の定義により

$$(4.2.20)\quad \mathcal{E}_{M\times N}\delta(\Omega(x, y))=\mathcal{E}_{M\times N}/\mathcal{I}$$

が成立することに注意しておこう．明らかに，$\mathcal{I}$ の生成元 $\mathcal{X}_j$ の主要表象 $\sigma(\mathcal{X}_j)$

---

*) 日本語としてややこなれぬ感じであるが，通常“量子化接触変換”と略称を用いている.

**) S.S. $\delta(\Omega(x, y))=S^*_H(M\times N)$ であることが，こう考える一つの背景である．より本質的には $\delta(\Omega)$ の満たす極大過剰決定系の特性多様体が $S^*_H(M\times N)$ (の複素化)になっていることが，背景にある．以下の議論は，極大過剰決定系と云う表現を使ってはいないけれども，内容的には極大過剰決定系の概念を用いている．なお，本定理の証明の後の注意も参照されたい.

$(j=1,\cdots,2n-1)$ および $\sigma(\Omega\mathcal{X}_{2n-1})$ の共通零点は $S_H^*(M\times N)$ に一致する．以下 $S^*(M\times N)$ の点を $(x,y;\xi,\eta)$ にて表わすこととしよう（ξ と η は各々 x および y に対応する余接ベクトル）．

さて，同型 (4.2.17) を言うには，$\mathcal{I}$ の生成元 $R_j(x,y,D_x,D_y)$ をうまく選んで，任意の $A(x,y,D_x,D_y)\in\mathcal{E}_{M\times N}(m)$ に対し適当な $Q_j\in\mathcal{E}_{M\times N}$ と $\tilde{A}(x,D_x)\in\mathcal{E}_M(m)$ を

$$(4.2.21)\quad A=\sum_{j=1}^{2n}Q_jR_j+\tilde{A}$$

となるように選べること，そして $\tilde{A}$ が A により一意に定まることを見れば十分である．然るに，条件 (4.2.10) により H は非特異，従って $S_H^*(M\times N)$ は非特異であり，しかも条件 (4.2.11) により，それは S^*M に局所的には同型であるから，適当な解析函数 $p_j(x,\xi),q_j(x,\xi)$ $(j=1,\cdots,n)$ を選べば，$S_H^*(M\times N)$ は

$$(4.2.22)\quad \begin{cases}\eta_j=p_j(x,\xi) & (j=1,\cdots,n)\\ y_j=q_j(x,\xi) & (j=1,\cdots,n)\end{cases}$$

と表示される．ここで p_j は ξ について一次斉次，q_j は同じく ξ について0次斉次である．従って，R_j として，その主要部が η_j-p_j $(j=1,\cdots,n)$ 又は y_j-q_j $(j=n+1,\cdots,2n)$ となる擬微分作用素をとれば，(4.2.21) の形の分解は主要部に関しては可能である．以下，R_j の低階の項をどのように選んでいったらよいかを考えてみよう．今，議論は $S_H^*(M\times N)$ 上で局所的に行えば十分であるから，適当な解析函数 $a_{jk}(x,y,\xi,\eta)$ および $b_{jk}(x,y,\xi,\eta)$ $(j=1,\cdots,n,$ $k=1,\cdots,2n)$ を選んで

$$(4.2.23)\quad \begin{cases}\eta_j-p_j=\sum_{k=1}^{2n-1}a_{jk}\sigma(\mathcal{X}_k)+a_{j,2n}\sigma(\Omega\mathcal{X}_{2n}) & (j=1,\cdots,n)\\ y_j-q_j=\sum_{k=1}^{2n-1}b_{jk}\sigma(\mathcal{X}_k)+b_{j,2n}\sigma(\Omega\mathcal{X}_{2n}) & (j=1,\cdots,n)\end{cases}$$

が成り立つようにできる．ここで a_{jk} は (ξ,η) に関して0次斉次，b_{jk} は同じく (ξ,η) に関して (-1) 次斉次である．更に

$$(4.2.24)\quad \det\begin{pmatrix}a_{1,1},\cdots,a_{1,2n}\\ \cdots\cdots\cdots\\ a_{n,1},\cdots,a_{n,2n}\\ b_{1,1},\cdots,b_{1,2n}\\ \cdots\cdots\cdots\\ b_{n,1},\cdots,b_{n,2n}\end{pmatrix}\neq 0$$

が $S_H^*(M\times N)$ 上で成り立っているとしてもよい．ここで先に述べたように (4.2.21) を満たす $\mathcal{I}$ の生成元 $R_j(j=1,\cdots,2n)$ を次の (4.2.25) のような形で求めてみよう．記号を簡単にする為 $S_j=R_{j-n}(j=n+1,\cdots,2n)$ と記すことにする．

$$(4.2.25)\quad \begin{cases} R_j=\sum_{k=1}^{2n-1}A_{jk}\mathcal{X}_k+A_{j,2n}(\Omega\mathcal{X}_{2n}-1) & (j=1,\cdots,n)\\ S_j=\sum_{k=1}^{2n-1}B_{jk}\mathcal{X}_k+B_{j,2n}(\Omega\mathcal{X}_{2n}-1) & (j=1,\cdots,n)\end{cases}$$

但し，ここで A_{jk}, B_{jk} はその主要表象が各々 a_{jk}, b_{jk} となる擬微分作用素とする．前節定理 4.1.6 の系の後の注意を用いれば，(4.2.24) により擬微分作用素の $2n\times 2n$ 行列 $\begin{pmatrix}A_{jk}\\ B_{jk}\end{pmatrix}_{\substack{1\leq j\leq n\\ 1\leq k\leq 2n}}$ は可逆である．従って，

$\mathcal{I}=\sum_{k=1}^{2n-1}\mathcal{E}_{M\times N}\mathcal{X}_k+\mathcal{E}_{M\times N}\ (\Omega\mathcal{X}_{2n}-1)$ より，

$$(4.2.26)\quad \mathcal{I}=\sum_{j=1}^{n}\mathcal{E}_{M\times N}R_j+\sum_{j=1}^{n}\mathcal{E}_{M\times N}S_j$$

を得る．次に，我々は，

$$(4.2.27)\quad \begin{cases} R_j(x,y,D_x,D_y)=D_{y_j}-P_j(x,y,D_x,D_y) & (j=1,\cdots,n)\\ S_j(x,y,D_x,D_y)=y_j-Q_j(x,y,D_x,D_y) & (j=1,\cdots,n)\end{cases}$$

として P_j, Q_j を定める時，

$$(4.2.28)\quad \begin{cases} [y_i,P_j]=0 & (i,j=1,\cdots,n)\\ [y_i,Q_j]=0 & (i,j=1,\cdots,n)\end{cases}$$

および

$$(4.2.29)\quad \begin{cases} [D_{y_i},P_j]=0 & (i,j=1,\cdots,n)\\ [D_{y_i},Q_j]=0 & (i,j=1,\cdots,n)\end{cases}$$

が成り立つように R_j および S_j を選べることを示したい．即ち，次式が成り立つように R_j 及び S_j を取り直すことを試みる．

$$(4.2.30)\quad \begin{cases} R_j=D_{y_j}-P_j(x,D_x) & (j=1,\cdots,n)\\ S_j=y_j-Q_j(x,D_x) & (j=1,\cdots,n)\end{cases}$$

もしこれが言えれば，前節の定理 4.1.7 および定理 4.1.8 により (4.2.21) を満たすように $\tilde{A}(x,D_x)$ を選べることは明らかである．また，その際，$A(x,y,D_x,D_y)$ が高々 m 階ならば，$\tilde{A}(x,D_x)$ も高々 m 階になることも明らかである．

(4.2.28)，(4.2.29) を満たすように R_j 及び S_j が選べることを示そう．i に

ついての帰納法を用いることとしよう．即ち

$$(4.2.28)_k \quad \begin{cases} [y_i, P_j]=0 & (i=1, \cdots, k, \ \ j=1, \cdots, n) \\ [y_i, Q_j]=0 & (i=1, \cdots, k, \ \ j=1, \cdots, n) \end{cases}$$

および

$$(4.2.29)_k \quad \begin{cases} [D_{y_i}, P_j]=0 & (i=1, \cdots, k, \ \ j=1, \cdots, n) \\ [D_{y_i}, Q_j]=0 & (i=1, \cdots, k, \ \ j=1, \cdots, n) \end{cases}$$

を k についての帰納法で示すこととする．

$k=0$ なら主張は明らか故，$k\geqq 1$ とし，$(4.2.28)_i$ 及び $(4.2.29)_i$ $(i<k)$ は成立しているとしよう．定義により R_k の主要表象は $\eta_k-p_k(x,\xi)$ であるから前節定理 4.1.7 により，擬微分作用素 $G_j, H_j, \tilde{P}_j, \tilde{Q}_j$ を適当に選んで

$$(4.2.31) \quad \begin{cases} P_j=G_jR_k+\tilde{P}_j & (j=1, \cdots, n) \\ Q_j=H_jR_k+\tilde{Q}_j & (j=1, \cdots, n) \end{cases}$$

かつ

$$(4.2.32) \quad [y_k, \tilde{P}_j]=[y_k, \tilde{Q}_j]=0 \quad (j=1, \cdots, n)$$

が成り立つようにできる．他方，帰納法の仮定より

$$(4.2.33) \quad [y_i, P_j]=[y_i, R_k]=[y_i, Q_j]=0 \quad (i<k, \ \ j=1, \cdots, n)$$

が成立しているから，定理4.1.7の主張の中，特に一意性に関する部分を用いて

$$(4.2.34) \quad [y_i, \tilde{P}_j]=[y_i, \tilde{Q}_j]=0 \quad (i\leqq k, \ \ j=1, \cdots, n)$$

を得る．ここで (4.2.31) において $\sigma_1(P_k)=p_k(x,\xi)$ 故，$\sigma_0(G_k)=0$，$\sigma_1(\tilde{P}_k)=\sigma_1(P_k)=p_k$ となる．従って $(1+G_k)$ は，前節定理 4.1.6 の系により可逆となり，

$$(4.2.35) \quad \mathcal{I}=\sum_{j=1}^{n} \mathcal{E}_{M\times N}(D_{y_j}-\tilde{P}_j)+\sum_{j=1}^{n} \mathcal{E}_{M\times N}(y_j-\tilde{Q}_j)$$

を得る．同様の議論で

$$(4.2.36) \quad [D_{y_k}, \tilde{P}_j]=[D_{y_k}, \tilde{Q}_j]=0 \quad (j=1\cdots, n)$$

とすることもできるから，結局 R_j, S_j を各々 $D_{y_j}-P_j$ および $y_j-\tilde{Q}_j$ で取り換えて$(4.2.28)_k$ および $(4.2.29)_k$ が成り立ち，帰納法が進行する．従って (4.2.30) が証明された．

最後に，A に対して (4.2.21) を満たすように定めた $\tilde{A}(x, D_x)$ が一意に決まることを示そう．それには，$A(x, D_x)\in\mathcal{I}$ ならば $A=0$，を言えばよい．

$A\in\mathcal{I}$ ならば，R_j, S_j は $\mathcal{I}$ の生成元故

$$(4.2.37) \quad A(x, D_x)=\sum_{j=1}^{n} G_jR_j+\sum_{j=1}^{n} H_jS_j \quad (G_j, H_j\in\mathcal{E}_{M\times N})$$

と表わされる．

再び帰納法により

$$(4.2.37)\quad \begin{cases} A=\sum_{j=k}^{n} G_jR_j+\sum_{j=1}^{n} H_jS_j \\ \text{かつ} \\ [y_i, G_j]=[y_i, H_j]=0 \quad (i<k) \end{cases}$$

となるよう，G_j, H_j を取れることを順次示そう．先程と同様に，G_j, H_j を各各 R_k で割算した剰余を $\tilde{G}_j, \tilde{H}_j$ とする．即ち，

$$(4.2.38)\quad [y_k, \tilde{G}_j]=[y_k, \tilde{H}_j]=0 \quad (j=1, \cdots, n)$$

としてよい．除法の一意性により，先程と同じく

$$(4.2.39)\quad [y_i, \tilde{G}_j]=[y_i, \tilde{H}_j]=0 \quad (i\leqq k,\ j=1, \cdots, n)$$

として構わない．従って

$$(4.2.40)\quad A(x, D_x)-\sum_{j=k+1}^{n}\tilde{G}_jR_j-\sum_{j=1}^{n}\tilde{H}_jS_j= T_kR_k \quad (T_k\in\mathcal{E}_{M\times N})$$

と表わされる．ここで R_j, S_j は (4.2.30) の形としてよいから，(4.2.40) の左辺は y_k と可換である．従って，除法の一意性により，$A-\sum_{j=k+1}^{n}G_jR_j-\sum_{j=1}^{n}\tilde{H}_jS_j=0$ を得る．このようにして帰納法が進行する．同じ議論を $\sum_{j=1}^{n}\tilde{H}_jS_j$ に対してもう一度適用して，結局 $(4.2.37)_n$ を得る．従って除法の一意性により，$A=0$ を得る．

以上の議論により，定理の最後の主張は明らかである．（証終）

注意．以上の議論において，$\delta(\Omega(x, y))$ を核函数とする積分変換 (4.2.14) により同型 (4.2.15) を得たけれど，核函数が $\delta(\Omega)$ でなくてもよい．例えば，$Y(\Omega(x, y))$ でもよいし，また，より一般に H 上で決して 0 にならない実数値実解析函数 $a(x, y)$ を用いて，$a(x, y)(\Omega(x, y))_+^\lambda/\Gamma(\lambda+1)$ $(\lambda\in\boldsymbol{C})$ を用いても構わない*)．このように，核函数の自由度があることから明らかなように，(4.2.15) の同型は，Ω が与えられても一意には決まらない．ここでは証明を省略するが，その任意性は 0 階の可逆な擬微分作用素による内部自己同型に限ることが

---

*) 一般的に言えば，H の余法束をその特性多様体とする単純極大過剰決定系の非退化な断面を核函数として (4.2.14) を考えることになる．この立場から問題を把握することは，母函数を持たない接触変換もこめて，より統一的に問題を捉えることができる点からも，また，その美的整合性からも望ましいが，かなりの準備を必要とするので本書では省略する．

知られている．即ち幾何学的変換によって作用素の変換を一意に定めることはできない．この点が，“量子化された接触変換”なる名称を導入した主な理由であった．

例 4.2.5. 例 4.2.3 で述べた Legendre 変換を量子化してみるとどうなるかを考えてみよう．$\Omega(x, y)=x_n-y_n+\sum_{j=1}^{n-1} x_j y_j$ とすれば，明らかに $\eta_n \neq 0$ なる限り，$\left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)^{-1}$ は擬微分作用素として well-defined であり，しかも

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)^{-1}\delta(\Omega)=-Y(\Omega)$$

が成立する．従って

$$x_j\delta(\Omega)=\frac{\partial}{\partial y_j}Y(\Omega)=-\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)^{-1}\delta(\Omega) \quad (j=1, \cdots, n-1)$$

を得る．また

$$x_n\delta(\Omega)=(y_n-\sum_{j=1}^{n-1} x_j y_j)\delta(\Omega)$$

であるから，

$$x_n\delta(\Omega)=\left(y_n+\sum_{j=1}^{n-1} y_j\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)^{-1}\right)\delta(\Omega)=\langle y, D_y\rangle\left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)^{-1}\delta(\Omega)$$

を得る．更に，

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\delta(\Omega)=y_j\delta'(\Omega)=y_j\left(-\frac{\partial}{\partial y_n}\right)\delta(\Omega) \quad (j=1, \cdots, n-1)$$

および

$$\frac{\partial}{\partial x_n}\delta(\Omega)=-\frac{\partial}{\partial y_n}\delta(\Omega)$$

が成り立つことも明らかである．関係式 (4.2.14) は

(4.2.14′) $P(x, D_x)\delta(\Omega(x, y))=Q^*(y, D_y)\,\delta(\Omega(x, y))$

と同値であるから（ここで Q^* は Q の共軛作用素），以上をまとめて次の対応を得る．

$$\text{(4.2.41 a)}\quad \begin{cases} x_j=\dfrac{\partial}{\partial y_j}\left(\dfrac{\partial}{\partial y_n}\right)^{-1} & (j=1, \cdots, n-1) \\ x_n=\langle y, D_y\rangle\left(\dfrac{\partial}{\partial y_n}\right)^{-1} & \\ \dfrac{\partial}{\partial x_j}=y_j\dfrac{\partial}{\partial y_n} & (j=1, \cdots, n-1) \\ \dfrac{\partial}{\partial x_n}=\dfrac{\partial}{\partial y_n} & \end{cases}$$

逆対応が次のように与えられることも同様にして確かめられる.

(4.2.41 b)
$$\begin{cases} y_j=\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)^{-1} & (j=1,\cdots,n-1) \\ y_n=\langle x, D_x\rangle\left(\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)^{-1} & \\ \dfrac{\partial}{\partial y_j}=-x_j\dfrac{\partial}{\partial x_n} & (j=1,\cdots,n-1) \\ \dfrac{\partial}{\partial y_n}=\dfrac{\partial}{\partial x_n} & \end{cases}$$

問.　(4.2.14) において核函数 $\delta(\Omega)$ を $Y(\Omega)$ に置き換えた場合，上の変換がどのように変わるかを調べよ.

定理 4.2.2 では，擬微分作用素の対応という観点から量子化接触変換を考察した．次に，量子化接触変換が microfunction の層の同型を惹き起こすことを確認しておこう．これにより，擬微分方程式の microfunction 解の構造を調べる際，量子化接触変換を自由に用いてよいことが保証される.

定理 4.2.3. 定理 4.2.2 と同じ仮定の下で,

(4.2.42)
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_M & \xrightarrow{\quad T \quad} & \mathcal{C}_N \\ \Cup & & \Cup \\ u(y) & \longmapsto & \displaystyle\int \delta(\Omega(x,y))u(y)dy \end{array}$$

なる写像は同型である.

［証明］

$$I(y',y)\underset{\mathrm{def}}{=}\int\delta(\Omega(x,y'))\,\delta(\Omega(x,y))dx$$

と $I(y',y)$ を定める時，I が $\sqrt{-1}S^*M$ 上の可逆な擬微分作用素の核函数となることを言えば十分である．解析函数に対する Weierstrass の予備定理(第 2 章第 4 節命題 2.4.3 の証明中の脚註参照)を用いることにより，最初から $\Omega(x,y)$は $x_1-f(x_2,\cdots,x_n,y)$ という形をしているとして構わない．その時

(4.2.43)
$$I(y',y)=\int\delta(f(x_2,\cdots,x_n,y)-f(x_2,\cdots,x_n,y'))dx_2\cdots dx_n$$

となる．Taylor 展開により

$$f(x_2,\cdots,x_n,y)-f(x_2,\cdots,x_n,y')=\langle y-y', G(x_2,\cdots,x_n,y,y')\rangle$$

となる G を見付けることができるから，(4.2.43) は

$$(4.2.44)\qquad \int\delta(\langle y-y',\ G(x_2,\cdots,x_n,y,y')\rangle)dx_2\cdots dx_n$$

となる．ここで $A(y,y',\eta)=\left|\det\left(\eta,\dfrac{\partial\eta}{\partial x_2},\cdots,\dfrac{\partial\eta}{\partial x_n}\right)\right|^{-1}$ と定めれば，(4.2.44) は

$$\int A(y,y',\eta)\delta(\langle y-y',\eta\rangle)\omega(\eta)$$

となる．従って $A(y,y',\eta)\neq 0$ に注意すれば，定理 4.1.3 と定理 4.1.6 の系より，$I(y,y')$ は可逆な擬微分作用素を定めることが判る． (証終)

§3. 擬微分方程式系の構造

前節で導入した量子化接触変換を用いることにより，一般の擬微分方程式系の構造を明らかにするのが本節の目標である．古典力学において，適当な正準変換により，すべての系は静止系に変換される，という極めて美しくかつ基本的な事実が知られている(例えば，山内 [1] 参照)．これは，解析的に言えば，一階偏微分方程式は正準変換により，簡単な標準型の方程式に移る，と云うことに他ならない．本節で紹介する結果は，これを，線型の場合に限ってではあるが，高階の方程式に迄一気に拡張するもので，極めて著しい結果と言えよう．なお，本書では，かなり特別な方程式系に話を限定することにしたが（後述注意 4.3.3 および注意 4.3.4 参照)，議論の本質的な所は，以下に論じる場合で理解して頂けると思う．

定理 4.3.1. $\mathscr{M}$ を点 $(x^0,\sqrt{-1}\,\xi^0\infty)\in\sqrt{-1}S^*M$ の近傍で定義され，次の条件 (4.3.1)～(4.3.4) を満たす $\mathscr{E}$-加群とする．

(4.3.1) 適当な $\mathscr{E}$ の左イデアル $\mathscr{I}$ が存在して $\mathscr{M}=\mathscr{E}/\mathscr{I}$ となる．

(4.3.2) $J\underset{\text{def}}{=}\bigcup_m\{\sigma_m(P)\mid P\in\mathscr{I}\cap\mathscr{E}(m)\}$ の零点集合 $V(J)$は $(x^0,\sqrt{-1}\,\xi^0\infty)$ のある複素近傍で余次元 d の非特異多様体を定め，しかも $\omega|_{V(J)}\neq 0$*) が成立する．

(4.3.3) J は $V(J)$ で零となる ξ について斉次である解析函数の全体と一致する．

*) ω は正準 1-型式 $\sum_j \xi_j dx_j$

†) $\overline{V(J)}$ は $V(J)$ の複素共軛を表わす．厳密に言えば $\sqrt{-1}S^*M$ に関しての共軛故"純虚"と謂うべきであるが，誤解はないであろう．

(4.3.4) $V(J)$ は実，即ち $V(J)=\overline{V(J)}$[†]

この時，適当な可逆量子化接触変換を用いることにより，$\mathcal{M}$ は次の方程式系 $\mathcal{N}$ に変換される.

(4.3.5) $\mathcal{N}=\mathcal{E}/(\mathcal{E}D_1+\cdots+\mathcal{E}D_d)$

注意 4.3.1. 今，$1\in\mathcal{E}$ の $\mathcal{J}$ での剰余類を u と記すこととすれば，(4.3.1) は

(4.3.6) $\mathcal{M}=\mathcal{E}u$，但し $Pu=0$ $(P\in\mathcal{J})$

と書き直される．このように書いた方が，(擬)微分方程式系という感じがする読者が多いかも知れない．ただ，(未知函数が一個と限らない)一般の擬微分方程式系を扱う際には，“擬微分方程式系とは，連接左 $\mathcal{E}$-加群，即ち，

$$0\leftarrow\mathcal{M}\leftarrow\mathcal{E}^s\leftarrow\mathcal{E}^t$$

なる表現を許す $\mathcal{E}$-加群”，と云う捉え方をした方が，議論が intrinsic になって望ましい．この事を念頭に置いて上のような表現をとった．また，このように“擬微分方程式系とは $\mathcal{E}$-加群のことである”と捉えれば，$\mathcal{H}om_{\mathcal{E}}(\mathcal{M},\mathcal{C})$ の元が $\mathcal{M}$ の microfunction 解を表わすという表現も容易に理解されよう(厳密に言えば $\mathcal{M}$ から $\mathcal{C}$ への $\mathcal{E}$-準同型による u の像が，$\mathcal{M}$ の microfunction 解を表わすことになる)．なお，方程式系 $\mathcal{N}$ を**ド・ラーム** (de Rham) **系**と呼ぶことがある．(厳密には部分 de Rham 系と謂うべきであろうが.)

注意 4.3.2. $\omega|_{V(J)}\neq 0$ 故，$d\leqq n-1$ が自動的に従う.

定理 4.3.1 の証明を始める前に，その特別な場合である次の事実を証明しよう．定理 4.3.1 の証明は，本質的にはこの定理に帰着される.

定理 4.3.2. $P(x,D_x)$ を $(x^0,\sqrt{-1}\xi^0\infty)=(0,\sqrt{-1}(0,0,\cdots,1)\infty)$ の近傍で定義された一階の擬微分作用素であってその主要表象 $\sigma_1(P)$ が ξ_1 であるものとする．この時，$(x^0,\sqrt{-1}\xi^0\infty)$ の近傍において

(4.3.7) $\mathcal{E}/\mathcal{E}P\cong\mathcal{E}/\mathcal{E}D_1$

が成立する.

[証明] 本章第1節の定理 4.1.9 により $P=Q(D_1-A(x,D'))$ $(D'\equiv(D_2,\cdots,D_n))$，但し Q は$(x^0,\sqrt{-1}\eta^0\infty)$ の近傍で可逆，とできるから，最初から $P=D_1-A(x,D')$ と仮定しておいても構わない．以下，$R^{-1}PR=D_1$ となる可逆

---

†) 前頁の註.

な擬微分作用素 $R(x, D')$ を次式 (4.3.8) および (4.3.9) を満たす R^k を用いて $\sum_{k=0}^{\infty} R^k(x, D')$ と云う形で求めることにする．このような R が存在すれば，(4.3.7) が成立することは明らかである．

(4.3.8) $R^0=1$

(4.3.9) $$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_1} R^k(x, D') = A(x, D') R^{k-1}(x, D') \\ R^k|_{x_1=0}=0 \end{cases} \quad (k \geqq 1)$$

ここで，(4.3.9) の左辺の意味は，R^k を，x_1 というパラメタに依存する擬微分作用素と見て，x_1 について微分する，或いは，x_1 に 0 を代入する，と云う意味である．(4.3.9) を具体的に解けば

(4.3.10) $$R^k(x, D') = \int_0^{x_1} A(s_k, x', D') \int_0^{s_k} A(s_{k-1}, x', D') \int_0^{s_{k-1}} \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots \int_0^{s_2} A(s_1, x', D') ds_1 \cdots ds_{k-2} ds_{k-1} ds_k$$

となる．ここで $x' \equiv (x_2, \cdots, x_n)$ であり，積分の意味は A を s_j なるパラメタに依存する作用素と見て s_j について積分する，の意である．(4.3.10) の積分域を V_k と記せば V_k の体積が $|x_1|^k/k!$ となることは明らかである．又，上の具体的表示式 (4.3.10) により，R^k は高々 0 階である．従って，$\delta, \varepsilon, M>0$ を

(4.3.11) $$\sup_{|s| \leqq \varepsilon} N_0(A(s, x', D'); t) \leqq M < \infty \quad (0 \leqq t \leqq \delta)$$

となるように選んでおけば，本章第1節定理 4.1.5 により得られる

(4.3.12) $$N_0(R^k(x, D'); t) \ll \int \underset{V_k}{\cdots} \int N_0(A(s_k, x', D') \cdots A(s_1, x', D') ds_1 \cdots ds_k$$
$$\ll \int \underset{V_k}{\cdots} \int [\sup_{|s| \leqq |x_1|} N_0(A(s, x', D'); t)]^k ds_1 \cdots ds_k$$

を用いて，

(4.3.13) $$N_0\Big(\sum_{k=0}^{\infty} R^k(x, D'); t\Big) \leqq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k |x_1|^k}{k!} = \exp(Mx_1) < \infty$$
$$(0 \leqq t \leqq \delta, \quad |x_1| \leqq \varepsilon)$$

が成立する．従って $R = \sum_{k=0}^{\infty} R^k(x, D')$ は，擬微分作用素として well-defined な意味を持つ．更に (4.3.8) および (4.3.9) の初期条件により $\sigma_0(R)|_{x_1=0}=1 \neq 0$ であるから，定理 4.1.6 の系により R は可逆である．他方 R^k の定義式 (4.3.8) および (4.3.9) により明らかに，

(4.3.14) $(D_1 - A(x, D')) \circ R = R \circ D_1$

を得る．（ここで $D_1\circ R$ は R を (x, D) についての擬微分作用素と見ての結合の意，従って (4.3.9) に用いられた $\dfrac{\partial}{\partial x_1}R$ とは意味が異なることに注意．実際，定義により $D_1\circ R=\dfrac{\partial R}{\partial x_1}+R\circ D_1$ である．）

注意 4.3.3. 上の命題において $\sigma(P)=\xi_1$ としたが，$\sigma(P)=\xi_1{}^m$ $(m\geqq 2)$ の場合にも，$\mathscr{E}$ を $\mathscr{E}^\infty$ に替えることにより同様の事実が成り立つことが知られている．即ち，この時も，無限階の作用素を許せば低階の項の処理が可能である．そのような作用素迄扱えることは超函数論の一つの大きな特長であるけれど，入門書としての本書の性格に鑑みて本書ではすべての考察を有限階の作用素の範囲に限定した．一つには，無限階の作用素の扱いは，現在，あまり“代数解析的”でない，と云う反省もある（勿論本質的に，無限階の作用素は“超越的”なもので，複素数体の位相的性質に強く依存している）．

定理 4.3.1 の証明に戻ろう．条件 (4.3.3) より $V(J)$ が包合的であることは容易に判る*)．実際，$f(x,\xi)|_{V(J)}=g(x,\xi)|_{V(J)}=0$ とすれば，適当な $P, Q\in\mathscr{I}$ を見付けて，$\sigma_1(P)=f$，$\sigma_1(Q)=g$ とできる．この時 $[P, Q]=PQ-QP\in\mathscr{I}$ 故，$\sigma_1([P, Q])|_{V(J)}=0$. 然るに $\sigma_1([P, Q])=\{\sigma_1(P), \sigma_1(Q)\}=\{f, g\}$ であるから，$\{f, g\}|_{V(J)}=0$. 従って $V(J)$ は包合的である．故に条件 (4.3.2) および (4.3.4) により，適当な量子化接触変換により $V(J)=\{\xi_1=\cdots=\xi_d=0\}$ であるとしても構わない．従って，(4.3.3) により $\mathscr{I}$ の元 $P_1, \cdots, P_d$ を

(4.3.15) $\quad \sigma_1(P_j)=\xi_j \quad (j=1, \cdots, d)$

となるように選ぶことができる．更に定理 4.3.2 の証明法により，$P_1=D_1$ であるとしても構わない．以下帰納法により，然るべく $\mathscr{M}$ の生成元を取り替えれば，

$(4.3.16)_k$ $\quad P_j=D_j \quad (j=1, \cdots, k)$

と取れることを，$k(\leqq d)$ についての帰納法で証明しよう．$(4.3.16)_k$ は成り立っているとしよう．この時，$D_ju=0$ $(j=1, \cdots, k)$ を用いることにより，

(4.3.17) $\quad P_j=P_j(x, D_{k+1}, \cdots, D_n) \quad (j=k+1, \cdots, d)$

と仮定しても構わない．定理 4.1.9 により，高々 0 階の擬微分作用素

*) 前節定義 4.2.6 の後の注意で述べた事実の特別な場合である．この場合は J が特殊な代数的条件 (4.3.3) を満たすので“容易”であるが，一般には，このような自明な話ではない．

$Q_{k+1}(x, D_{k+2}, \cdots, D_n)$ と可逆な擬微分作用素 $R(x, D_{k+1}, \cdots, D_n)$ が存在して

(4.3.18)　$P_{k+1}(x, D_{k+1}, \cdots, D_n) = R(D_{k+1} + Q_{k+1})$

が成り立つ．ここで R, Q_{k+1} がこの形を持つこと，即ち，一部の D_j には依存しないことは，定理 4.1.9 の一意性の主張による．従って，最初から $P_{k+1} = D_{k+1} + Q_{k+1}(x, D_{k+2}, \cdots, D_n)$ と仮定しておいて構わない．従って $(D_{k+1} + Q_{k+1})u = 0$ なる関係式を用いて

(4.3.19)　$P_j = P_j(x, D_{k+2}, \cdots, D_n) \quad (j = k+2, \cdots, d)$

と仮定することができる．ここで再び P_{k+2} に定理 4.1.9 を適用して，$P_{k+2} = D_{k+2} + Q_{k+2}(x, D_{k+3}, \cdots, D_n)$ とすることができる．以下同じ手続を繰り返すことにより

(4.3.20)　$\begin{cases} P_j = D_j & (j = 1, \cdots, k) \\ P_{k+1} = D_{k+1} + Q_{k+1}(x, D_{d+1}, \cdots, D_n) \end{cases}$

とすることができる．さて $j = 1, \cdots, k$ に対して $[D_j, P_{k+1}] = D_j P_{k+1} - P_{k+1} D_j \in \mathscr{I}$ であるから，$[D_j, Q_{k+1}] \in \mathscr{I}$ $(j = 1, \cdots, k)$ となる．ここで実は，$[D_j, Q_{k+1}] = 0$ であることを示そう．もしも $[D_j, Q_{k+1}] \neq 0$ ならば，その階数を m としよう．従って $[D_j, Q_{k+1}] \in \mathscr{I}$ 故，$V(J)$ 上で $\sigma_m([D_j, Q_{k+1}]) = 0$ となる．従って，$q_{k+1,m}$ を Q_{k+1} の m 次斉次部分とし

$$\sigma_m([D_j, Q_{k+1}]) = \{\xi_j, q_{k+1,m}\} = \frac{\partial}{\partial x_j} q_{k+1,m} = 0$$

が $V(J)$ 上で成り立つ．然るに $q_{k+1,m}$ は (4.3.20) より $\xi_1, \cdots, \xi_d$ には依存しないから，結局 $\dfrac{\partial}{\partial x_j} q_{k+1,m}$ は恒等的に零となり，$\sigma_m([D_j, Q_{k+1}]) \neq 0$ なる仮定に反する．従って $[D_j, Q_{k+1}] = 0$ $(j = 1, \cdots, k)$ が示された．即ち，Q_{k+1} は $(x_{k+1}, \cdots, x_n, D_{d+1}, \cdots, D_n)$ にのみ依存する．故に，定理 4.3.2 の証明法により可逆な擬微分作用素 $R(x_{k+1}, \cdots, x_n, D_{k+1}, \cdots, D_n)$ を見付けて

(4.3.21)　$R^{-1} P_{k+1} R = D_{k+1}$

が成り立つようにできる．ここで R は，その形より明らかに $D_j (j = 1, \cdots, k)$ と可換であるから，$R^{-1} D_j R = D_j$ $(j = 1, \cdots, k)$ が成立する．従って，$\mathscr{M}$ の生成元 u を Ru に取り替えることにより．$\mathscr{I}$ の生成元 P_j を $(4.3.16)_{k+1}$ を満たすように取ることができる．従って帰納法が進行する．

次に $(4.3.16)_d$ を用いて $\mathscr{I}$ が $D_1, \cdots, D_d$ で生成されることを背理法により示そう．もし $\mathscr{I}$ が $D_1, \cdots, D_d$ で生成されないなら，ある $0 \neq R(x, D_{d+1}, \cdots, D_n)$

$\in\mathcal{I}$ が存在する．然るに $V(J)$ の定義により $\sigma(R)|_{V(J)}=0$ が成り立つ．$\sigma(R)$ は R の形より $\xi_1,\cdots,\xi_d$ には依存しないから，これは $\sigma(R)=0$ を意味する．これは矛盾である．従って $\mathcal{I}$ は $D_1,\cdots,D_d$ によって生成される．即ち $\mathcal{M}$ は (4.3.5) の形の方程式 $\mathcal{N}$ に同型である．

注意 4.3.4. 注意 4.3.3 に対応して，条件 (4.3.3) も，(無限階の作用素を用いれば)不要になることを注意しておこう．従って，microfunction の層に無限階の作用素も層準同型として作用するから，例えば次定理(定理 4.3.3) において条件 (4.3.3) は実は不要である．以下，この点については深くは触れない．

定理 4.3.1 を得てしまえば，定理の条件を満たす擬微分方程式系の microfunction 解の性質のうち，量子化接触変換で不変なものは極めて簡単に確かめ得る．その最も基本的な一例として，解が陪特性体に沿って伝播することを定理の形で述べておこう(定理4.3.3)．定理を述べるに先立ち，第 3 章第 5 節定義 3.5.1 で与えた陪特性帯の概念をより一般の場合に拡張しておこう．

定義 4.3.1. $\sqrt{-1}S^*M$ の包合的部分多様体 V が (4.3.2) および (4.3 4) を満たしているとする．$V=\{(x,\sqrt{-1}\xi\infty)\in\sqrt{-1}S^*M\mid f_1(x,\xi)=\cdots=f_d(x,\xi)=0\}$ とした時，$(x^0,\sqrt{-1}\xi^0)\in V$ を通る**陪特性(集合)体** (bicharacteristric manifold) $b=b_{(x^0,\sqrt{-1}\xi^0)}$ とは，V に付随して定まる次の d 個のハミルトン作用素 H_{f_j} の，$(x^0,\sqrt{-1}\xi^0\infty)$ を通る d-次元積分多様体のことを謂う．

$$H_{f_j}=\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial\xi_l}\frac{\partial}{\partial x_l}-\frac{\partial f_j}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial\xi_l}\right)\quad(j=1,\cdots,d)\tag{4.3.22}$$

注意 4.3.5. V が包合的故，$\{H_{f_j}\}_{j=1}^d$ は積分可能条件を満たしている．又，b の定義が $\{f_j\}_{j=1}^d$ の選び方によらないことは明らかである．

定理 4.3.3. $\mathcal{M}$ を定理 4.3.1 の条件を満たす $\mathcal{E}$-加群とする．この時 $(x^0,\sqrt{-1}\xi^0)$ の適当な近傍 U において次の事実が成立する．

(4.3.23) $\mathcal{M}$ の microfunction 解層 $\mathcal{S}\underset{\text{def}}{=}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}}(\mathcal{M},\mathcal{C})$ は V にのみその台を持ち，かつ，V の陪特性体に沿って局所一定である．更に，$\mathcal{S}$ は陪特性体と横断的な方向に沿っては脆弱である．

［証明］ 定理の陳述は量子化接触変換によって不変であるから，$\mathcal{M}$ が $\mathcal{N}=$

$\mathcal{E}/(\mathcal{E}D_1+\cdots+\mathcal{E}D_d)$ の場合に証明すれば十分である．$\mathcal{N}$ に対して (4.3.24) は第3章第2節の最初の補題と同様にして証明される．

注意 4.3.6. 方程式系 $\mathcal{M}$ が $\sqrt{-1}\,S^*M$ 上局所的に可解であること(即ち，代数的な両立条件を満たす microfunctions f_j に対し $P_j u=f_j$ (ここで P_j は $\mathcal{I}$ の生成元)が microfunction 解を持つこと)も同様にして示すことができる．もっと一般的に，$\mathcal{M}$ に関する高次のコホモロジー群 $\mathcal{E}xt^j(\mathcal{M},\mathcal{C})$ $(j\geqq 1)$ が常に消滅することも示し得るが，本書の程度をやや超える代数的準備を必要とするのでここでは省略する．

注意 4.3.7. 本書をここまで読み進んでこられた読者にとって定理 4.3.3 は殆んど自明で，その理解に何ら困難を感じられなかったことと思う．然しながら，定理 4.3.3 の結果，即ち，“陪特性体に沿っての特異性の伝播”と云う事実は，単独方程式(即ち $d=1$) の場合においてすら，以下に述べる局所非可解性の問題と並んで，線型微分方程式論の一つの中心問題であり，実解析的範疇において確立されたのは，microfunction の理論ができてからのことであった．(C^∞ の範疇においても，1960 年代に到るまで $d=1$ の場合ですら確立はされなかった．しかも，その陳述は，陪特性帯を用いてでなく，陪特性曲線のみを用いる不徹底なものであった．(前章第6節の最後の部分を参照)．Microfunction と量子化接触変換の現われる以前の線型偏微分方程式論の様子に歴史的観点から興味を持たれる読者は，例えば，Hörmander [1] を参照されたい．きっと“B.C. (Before $\mathcal{C}$)”と感じられることであろう)．そのような問題が，かくも“自明”の定理となってしまった所に，数学の進歩を見るのは容易であろう．山頂に立って一気に眺望の開ける感がある．

注意 4.3.8. 定理 4.3.1 は，そのままの形で複素領域に拡張できる(その場合，匀論条件 (4.3.4) は不要である)と云う意味で最も基本的な定理である．本書では擬微分作用素の概念を $\sqrt{-1}\,S^*M$ 上で定義したが，擬微分作用素の結合，変換等々の理論が実多様体に限らず，複素多様体 X に対しても，その余接射影束 P^*X 上でも展開されることは容易に推測されよう．実際，S-K-K [1] ではそのようにして理論を展開し，実多様体上での作用素はそれを制限して考えている．その方が理論的整合性は高まるが，やや直感に訴える所が少いように思われるので，本書では，敢えてやや中途半端な形で擬微分作用素を定義し

た．もし，層 $\mathscr{E}$ を P^*X 上で定義しておけば，定理 4.3.1 を次のように定式化することが可能である：$\mathscr{M}$ を $(x^0,\xi^0)\in P^*X$ の近傍で定義され，条件 (4.3.1)，(4.3.25)，(4.3.3) を満たす $\mathscr{E}$-加群とする．

(4.3.25)　$V(J)\subset P^*X$ は余次元 d の非特異多様体であり，しかも $\omega|_{V(J)}\neq 0$.

この時，（適当な量子化接触変換により）$\mathscr{M}$ は $\mathscr{N}=\mathscr{E}/(\mathscr{E}D_1+\cdots+\mathscr{E}D_d)$ と同型である．

証明は，擬微分作用素の理論 をP^*X 上で展開しておけば，本書で述べたのと同様にして与えられる．ここでは詳細は省略する．ただ，定理 4.3.1 の証明で，幾何学的な事実としては，$V(J)$ が実かつ，条件 (4.3.2) を満たすならば(実の)接触変換により $V(J)=\{\xi_1=\cdots=\xi_d=0\}$ とできる，と云うことしか用いていないことに注意を喚起しておこう．勿論，複素領域では $V(J)$ が実という条件無しで，即ち (4.3.25) だけで，このように出来，しかも，その後の議論は実領域でも複素領域でも差は無いのである．

さて，上に注意したように，定理 4.3.1 は本質的には，複素領域の定理と言うこともできる．実際，実領域において問題を考えた為に必要とされた条件 (4.3.4) は極めて特殊な方程式系に対してしか満たされない(勿論，“応用上現われる方程式”に対してはそれ程特殊でない，と云うことは言い得るけれど)．この意味において，理論的には，実領域において“generic”な方程式系はどのようなものか，と云う問題が自然に生じる．この為には，Vを，実の接触変換により，どこまで標準的なものに直せるか，が先ず問題となる．これに対する解答は，方程式系に対して与えられている(後述 (4.3.82) 式参照)けれど，ここでは，議論の本質を浮かび上がらせる為に単独方程式に議論を限定することにする．先ず次の定理の証明から議論を始めよう．

定理 4.3.4.　M を $x^0\in\boldsymbol{R}^n$ の開近傍とする．$f(x,\xi)$ を $(x^0,\xi^0)\in T^*M-M$ の近傍で定義された実解析函数であって次の条件(4.3.26)～(4.3.28)を満たすものとする．

(4.3.26)　f は ξ について 1/2 次正的斉次 (positively homogeneous)，即ち $f(x,c\xi)=c^{1/2}f(x,\xi)$ $(c>0)$ を満たす．

(4.3.27)　$f(x^0,\xi^0)=0$

(4.3.28)　$\dfrac{1}{2\sqrt{-1}}\{f,\tilde{f}\}\ (x^0,\xi^0)\gneq 0$

この時，$(x,\xi,t,\bar{t})=(x^0,\xi^0,0,0)\in(T^*M-M)\times \boldsymbol{C}\times\overline{\boldsymbol{C}}$ の近傍で定義された実数値実解析函数 $\Phi(x,\xi,t,\bar{t})$ であって次の三つの条件を満たすものが存在する(ここで $\bar{t}$ は t の複素共軛を表わす).

(4.3.29)　$\Phi(x^0,\xi^0,0,0)\gneq 0$

(4.3.30)　$\Phi(x,\xi,f(x,\xi),\bar{f}(x,\xi))$ は ξ について 1/2 次正的斉次である.

(4.3.31)　$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\{f(x,\xi)\Phi(x,\xi,f(x,\xi),\bar{f}(x,\xi)),\bar{f}(x,\xi)\Phi(x,\xi,f(x,\xi),\bar{f}(x,\xi))\}=1$$

［証明］　記号が却って簡単になるので，問題を次の主張 (C) のように少し一般化して設定しよう：

(C)：$F(x,\xi,t,\bar{t})$ を $(x^0,\xi^0,0,0)$ の近傍で定義された真に正値の実解析函数であって，$F(x,\xi,f(x,\xi),\bar{f}(x,\xi))$ が ξ について正的に 0 次斉次なるものとしよう．この時，

(4.3.32)　$$\{f(x,\xi)\Phi(x,\xi,f(x,\xi),\bar{f}(x,\xi)),\ \bar{f}(x,\xi)\Phi(x,\xi,f(x,\xi),\ \bar{f}(x,\xi)\}=\{f(x,\xi),\ \bar{f}(x,\xi)\}F(x,\xi,f(x,\xi),\ \bar{f}(x,\xi))$$

を満たす実数値実解析函数 $\Phi(x,\xi,t,\bar{t})$ を $\Phi(x,\xi,f(x,\xi),\bar{f}(x,\xi))$ が ξ について正的に 0 次斉次になり，かつ $\Phi(x^0,\xi^0,0,0)>0$ が成り立つように求め得る．

明らかに，命題は (C) において $F=2/\{f,\bar{f}\}$ とした場合に該る．

(C) を証明しよう．簡単の為，$\Psi(x,\xi,t,\bar{t})=(\Phi(x,\xi,t,\bar{t}))^2$ と置く．また，T^*M-M 上の函数 $g(x,\xi)$ に対し，$\Theta,\overline{\Theta}$ を次のように定める．

(4.3.33)　$$\begin{cases}\Theta g=\dfrac{\{g,\bar{f}\}}{\{f,\bar{f}\}}\\[2ex] \overline{\Theta}g=\dfrac{\{f,g\}}{\{f,\bar{f}\}}\end{cases}$$

微分作用素 $\Theta,\overline{\Theta}$ は自然に $\Psi(x,\xi,t,\bar{t})$ にも作用する．以上の記号の準備の下に，(4.3.32) が次式 (4.3.34) の解 $\Psi\gneq 0$ を求めることに帰着されることは見易い．

(4.3.34)　$$\Psi(x,\xi,t,\bar{t})+\frac{1}{2}t\left(\frac{\partial\Psi(x,\xi,t,\bar{t})}{\partial t}+\Theta\Psi(x,\xi,t,\bar{t})\right)+\frac{1}{2}\bar{t}\left(\frac{\partial\overline{\Psi}(x,\xi,t,\bar{t})}{\partial\bar{t}}+\overline{\Theta}\Psi(x,\xi,t,\bar{t})\right)=F(x,\xi,t,\bar{t}).$$

このままでは，$t=\bar{t}=0$ で退化した方程式で扱いにくいので(直接扱うことも勿

論可能であるが)，退化した方程式の取扱いの一つの常套手段である，($(t, \bar{t})$-空間の原点で)特異な座標変換を用いて (4.3.34) の解の存在を示そう．即ち

(4.3.35) $\quad \Omega(\lambda, t, \bar{t})(\equiv \Omega(x, \xi; \lambda, t, \bar{t})) = \lambda^2 \Psi(x, \xi, \lambda t, \lambda \bar{t}) \quad (\lambda \in \boldsymbol{R})$

となる実数値函数 Ω を求めることを試みよう．(以下 Ω の (x, ξ) への依存が本質的でない所では $\Omega(\lambda, t, \bar{t})$ と略記する．) (4.3.35) を用いて (4.3.34) をΩの方程式に書き直せば

(4.3.36) $\quad \dfrac{\partial}{\partial \lambda}\Omega + \Theta(\bar{t}\Omega) + \bar{\Theta}(t\Omega) = 2\lambda F(x, \xi, \lambda t, \lambda \bar{t})$

が得られる．ここで $\{\lambda=0\}$ での Ω の初期値を 0 で与えれば，$\{\lambda=0\}$ は (4.3.36) に関して非特性的故，(4.3.36) により Ω は一意に定まる．しかも，F は実数値函数故，Ω の複素共軛 $\bar{\Omega}$ もやはり (4.3.36) の解である．他方，$\bar{\Omega}$ の $\{\lambda=0\}$ での初期値も 0 であるから，Cauchy 問題の解の一意性により $\Omega = \bar{\Omega}$ が成立する．即ち，Ω は実数値函数である．しかも $\Theta, \bar{\Theta}$ は (x, ξ) に関する微分作用素であるから，(4.3.36) より

(4.3.37) $\quad \left.\dfrac{\partial \Omega}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0} = 0$

を得る．従ってΩの初期条件と (4.3.37) を合わせて Ω/λ^2 は $\{\lambda=0\}$ の近傍で正則である．ここで Ω/λ^2 が $(x, \xi, \lambda t, \lambda \bar{t})$ の解析函数ならば，それを求める $\Psi(x, \xi, \lambda t, \lambda \bar{t})$ として取ることが出来る．これを言うには，Ω が $(\lambda, t, \bar{t})$ に関して次の斉次性の条件を満たすことを言えば十分である．

(4.3.38) $\quad \Omega(c\lambda, c^{-1}t, c^{-1}\bar{t}) = c^2 \Omega(\lambda, t, \bar{t}) \quad (c \in \boldsymbol{R} - \{0\})$

今，$\mu = c^{-1}\lambda$, $s = ct$, $\bar{s} = c\bar{t}$ と置いて $\tilde{\Omega}(\mu, s, \bar{s}) = \Omega(c\mu, c^{-1}s, c^{-1}\bar{s})$ と定めれば，(4.3.36) より

(4.3.39) $\quad \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial \mu}\tilde{\Omega} + \Theta\left(\dfrac{\bar{s}}{c}\tilde{\Omega}\right) + \bar{\Theta}\left(\dfrac{s}{c}\tilde{\Omega}\right) = 2\,c\mu F(x, \xi, \mu s, \mu \bar{s})$

を得る．従って $(\tilde{\Omega}/c^2)(\lambda, t, \bar{t})$ は $\lambda=0$ で 0 になる (4.3.36) の解故，(4.3.36) の解の一意性より

(4.3.40) $\quad \tilde{\Omega}(\lambda, t, \bar{t})/c^2 = \Omega(\lambda, t, \bar{t})$

を得る．従って (4.3.40) と $\tilde{\Omega}$ の定義により (4.3.38) を得る．よって，$\Psi = \Omega(1, \lambda t, \lambda \bar{t})$ と取ることにより (4.3.34) の解 Ψ が得られたことになる．

ここで (4.3.36) において，両辺の λ についての Taylor 展開の係数を見ることにより，

$$(4.3.41)\quad \left.\frac{\Omega}{\lambda^2}\right|_{\lambda=0}=F(x,\xi,0,0)>0$$

が得られるから，$\Psi(x^0,\xi^0,0,0)\gneqq 0$，従って $\Phi(x^0,\xi^0,0,0)>0$ が成り立っているとしてよい．最後に $\Phi(x,\xi,f(x,\xi),\bar{f}(x,\xi))$ の斉次性を示すことが残っているが，$f(x,\xi)$ が ξ について正的に 1/2 次斉次であるから，

$$(4.3.42)\quad \Psi(x,c\xi,\ c^{1/2}t,\ c^{1/2}\bar{t})=\Psi(x,\xi,t,\bar{t})\quad (c>0)$$

を言えば十分である．(4.3.35) により，これを言うには，

$$(4.3.43)\quad \Omega(x,\lambda^2\xi,\lambda,t,\bar{t})=\lambda^2\Omega(x,\xi,1,t,\bar{t})\quad (\lambda>0)$$

が言えればよい．従って (4.3.38) を用いて

$$(4.3.44)\quad \Omega(x,\lambda^2\xi,\lambda,t,\bar{t})=\Omega(x,\xi,\lambda,\lambda^{-1}t,\lambda^{-1}\bar{t})\quad (\lambda>0)$$

を言えば十分である．これは，Θ の定義と，$f(x,\xi)$ が正的に 1/2 次斉次であることを合わせ用いれば，(4.3.38) の証明と同様にして得られる．

以上により，主張 (C)，従って定理 4.3.4 の証明が終った． (証終)

定理 4.3.4 を用いて，我々は次のような極めて驚くべき結果を得る．

定理 4.3.5. $P(x,D_x)$ を $(x^0,\sqrt{-1}\,\xi^0\infty)\in\sqrt{-1}S^*M$ の近傍で定義された m 階擬微分作用素とする．その主要表象 $\sigma_m(P)(x,\ \sqrt{-1}\,\xi)\underset{\mathrm{def}}{=}f(x,\xi)$ が次の条件 (4.3.45)，(4.3.46) を満たすとする．

$$(4.3.45)\quad f(x^0,\xi^0)=0$$

$$(4.3.46)\quad \{f,\bar{f}\}(x^0,\xi^0)\gneqq 0$$

この時，適当な可逆な(実)量子化接触変換により，方程式 $Pu=0$ は，$(y;\sqrt{-1}\,\eta)=(0;\ \sqrt{-1}(0,\cdots,0,1))$ の近傍で定義された次の方程式 $\mathcal{N}$ に変換される．

$$(4.3.47)\quad \mathcal{N}:\left(\frac{\partial}{\partial y_1}-\sqrt{-1}\,y_1\frac{\partial}{\partial y_n}\right)u=0$$

［証明］ $(D_1{}^2+\cdots+D_n{}^2)^{-\frac{2m-1}{4}}P(x,D_x)$ を考えることにより，最初から f は ξ について正的に 1/2 次斉次であると仮定しておいても構わない．更に定理 4.3.4 により，$\Phi(x,-\sqrt{-1}D_x,\ f(x,-\sqrt{-1}D_x),\ \bar{f}(x,-\sqrt{-1}D_x))$*) を考える

*) $f(x,-\sqrt{-1}D_x)$ 他は，各々，$f(x,\xi)=\sum_\alpha a_\alpha(x)\xi^\alpha$ に対し，$f(x,-\sqrt{-1}D_x)=\sum_\alpha a_\alpha(x)(-\sqrt{-1}D_x)^\alpha$ と定めるの意である．$f(x,\xi)$ に対して $f(x,-\sqrt{-1}D_x)$ が規準的に定まる訳ではないが，ここでは，主要表象の調節のみを目的としているから一つ対応のさせ方を定めておくだけで十分である．

ことにより

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\{f,\bar{f}\}=1 \tag{4.3.48}$$

が満たされているとしてもよい.

従って，適当な実の接触変換により $(y;\eta)=(0;0,\cdots,0,1))$ の近傍で

$$f=y_1\eta_n{}^{1/2}+\sqrt{-1}\eta_1\eta_n{}^{-1/2} \tag{4.3.49}$$

が成立しているとしてよい．故に，最初から P の主要表象は $\eta_1-\sqrt{-1}y_1\eta_n$ であるとしてよい．従って，適当な(複素)座標変換の後に定理 4.3.2 を用いることにより*)，定理を得る. (証終)

(証終)

注意 4.3.9. 定理 4.3.5 において，(4.3.46) の代わりに $\{f,\bar{f}\}(x^0,\xi^0)\lneqq 0$ を課せば，標準的な方程式$\mathcal{N}$としては $((y;\sqrt{-1}\eta)=(0;\sqrt{-1}(0,\cdots,0,1)$ の近傍で) $\left(\frac{\partial}{\partial y_1}+\sqrt{-1}y_1\frac{\partial}{\partial y_n}\right)u=0$ が現われることは今までの議論より明らかであろう.

注意 4.3.10. 定理 4.3.5 の仮定の下で $V=\{f(x,\xi)=0\}$ と $\bar{V}=\{\bar{f}(x,\xi)=0\}$ は横断的に交わり，$\omega|_{V\cap\bar{V}}$ は $V\cap\bar{V}$ に接触構造を与えている．この事態の一つの興味深い拡張として，codim $(V\cap\bar{V})=2$，かつ，$\omega|_{V\cap\bar{V}}$ が $V\cap\bar{V}$ に接触構造を与えている時，方程式 $Pu=0$ はどのような標準型に直せるか，と云う問題を考えることができる．この場合，上とほぼ同様の議論で，標準的な方程式として

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\pm\sqrt{-1}y_1^k\frac{\partial}{\partial y_n}\right)u=0 \tag{4.3.50}$$

をとることができることが知られている(佐藤-河合-柏原 [2])．この形の方程式の面白さは溝畑 [2] により始めて注意された.

---

*) ここで $\{f,\bar{f}\}\neq 0$ ならば，$d_{(x,\xi)}f\not\parallel\omega$ が成り立つことに注意せよ．又，定理 4.3.2 は一応実領域での結果としたので(注意 4.3.8 参照)，ここの議論は論理的には不備である．そこが不満な読者は，定理 4.3.2 を，この場合に直接証明することを試みられたい． 逐次近似で形式的に求めた作用素の無限級数の収束がやや面倒になるだけでそれ程難しくはない．S-K-K [1] 第Ⅱ章 §2.1. 定理 2.1.2 およびその後の注意 1 参照).

定理 4.3.5 により，(4.3.46) という条件の下に，擬微分方程式の解の超局所的構造の研究は洵に簡単な方程式 $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\pm\sqrt{-1}x_1\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)u=0$ の解の研究に帰着されてしまった．次に，この特別な解の構造を直接計算により調べてみよう．なお，以下に見られるように，このような簡単な方程式についても，その本質の理解には超局所的取扱が不可欠であることに注目されたい．

定理 4.3.6. $P(x, D_x)=D_1-\sqrt{-1}x_1D_n$，$Q(x, D_x)=D_1+\sqrt{-1}x_1D_n$ とする．この時，$(x^0; \sqrt{-1}\xi^0\infty)=(0; \sqrt{-1}(0, 0, \cdots, 1)\infty)\in\sqrt{-1}S^*\boldsymbol{R}^n$ の近傍で定義された 0 でない超局所作用素 $\mathscr{K}$ が存在して，次の系列 (4.3.51) は完全である．

$$(4.3.51)\qquad 0\longrightarrow\mathscr{C}\xrightarrow{Q}\mathscr{C}\xrightarrow{\mathscr{K}}\mathscr{C}\xrightarrow{P}\mathscr{C}\longrightarrow 0$$

従って，特に P は $(x^0; \sqrt{-1}\xi^0\infty)$ の近傍で可解であるが，Q は可解ではなく，その値域は作用素 $\mathscr{K}$ の核 (Ker $\mathscr{K}$) として特徴付けられる．

［証明］ 計算の便宜の為，$(x, t)\in\boldsymbol{R}^{n+1}$ で定義された次の微分作用素 R, R' を考えよう．

$$(4.3.52)\qquad \begin{cases} R=P(x, D_x)+\dfrac{\sqrt{-1}}{2}D_t \\[2ex] R'=P^*(x', D_{x'})+\dfrac{\sqrt{-1}}{2}D_t \end{cases}$$

(ここで $P^*(x', D_{x'})$ は $P(x, D_x)$ の共軛作用素 $-\partial/\partial x_1'+\sqrt{-1}x_1'\partial/\partial x_n'$ を表わす)．

次に $\varphi(x, x', t)$ を次式のように定めよう．

$$(4.3.53)\qquad \varphi=x_n-x_n'+(x_1+x_1')t+\frac{\sqrt{-1}}{4}((x_1-x_1')^2+4t^2))$$

この時，第2章第4節命題 2.4.2 により $(\varphi+\sqrt{-1}\,0)^\alpha$ は well-defined であり (同節例 2.4.3 も参照)，更に，

$$\begin{aligned}(4.3.54)\qquad \mathrm{S.S.}(\varphi+\sqrt{-1}0)^\alpha\subset\{&(x, x', t; \sqrt{-1}(\langle\xi, dx\rangle+\langle\xi', dx'\rangle+\langle\tau, dt\rangle)\infty\,|\\ &x_1=x_1',\ x_n=x_n',\ t=0,\ \xi_1=\cdots=\xi_{n-1}=\xi_1'=\cdots=\xi_{n-1}'=0,\\ &\xi_n=-\xi_n'=1,\ \tau=x_1+x_1'\}\end{aligned}$$

が成り立つ．

さて，明らかに $R\varphi=0$ 故，

$$(4.3.55)\qquad R(\varphi+\sqrt{-1}\,0)^\alpha=0$$

が成り立つ．他方，$1/(x+\sqrt{-1}y)$を第2章第4節例 2.4.8 で考えた超函数とすれば，

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{x+\sqrt{-1}y}\right)=2\pi\delta(x)\delta(y) \tag{4.3.56}$$

が成り立つから

$$R\left(\frac{(\varphi+\sqrt{-1}0)^\alpha}{t-\frac{\sqrt{-1}}{2}(x_1-x_1')}\right)=R\left(\frac{1}{t-\frac{\sqrt{-1}}{2}(x_1-x_1')}\right)(\varphi+\sqrt{-1}0)^\alpha= \tag{4.3.57}$$

$$=2\pi\sqrt{-1}\delta(x_1-x_1')\delta(t)(\varphi+\sqrt{-1}0)^\alpha$$

$$=2\pi\sqrt{-1}\delta(x_1-x_1')\delta(t)(x_n-x_n'+\sqrt{-1}0)^\alpha$$

を得る．なお，ここで (4.3.54) により，$(\varphi+\sqrt{-1}0)^\alpha/(t-\frac{\sqrt{-1}}{2}(x_1-x_1'))$ は超函数として well-defined であることに注意(第3章第1節定理 3.1.5)．

同様にして，$R'\varphi=\sqrt{-1}(x_1-x_1'+2\sqrt{-1}t)$ より

$$R'\left(\frac{(\varphi+\sqrt{-1}0)^\alpha}{t-\frac{\sqrt{-1}}{2}(x_1-x_1')}\right) \tag{4.3.58}$$

$$=2\pi\sqrt{-1}\delta(x_1-x_1')\delta(t)(x_n-x_n'+\sqrt{-1}0)^\alpha-2\alpha(\varphi+\sqrt{-1}0)^{\alpha-1}$$

を得る．

従って (4.3.57)，(4.3.58) の両辺を各々 t について積分することにより

$$P(x,D_x)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\varphi+\sqrt{-1}0)^\alpha}{(t-\frac{\sqrt{-1}}{2}(x_1-x_1'))}dt= \tag{4.3.59}$$

$$=2\pi\sqrt{-1}\delta(x_1-x_1')(x_n-x_n'+\sqrt{-1}0)^\alpha$$

および

$$P^*(x',D_{x'})\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\varphi+\sqrt{-1}0)^\alpha}{(t-\frac{\sqrt{-1}}{2}(x_1-x_1'))}dt= \tag{4.3.60}$$

$$=2\pi\sqrt{-1}\delta(x_1-x_1')(x_n-x_n'+\sqrt{-1}0)^\alpha-2\alpha\int_{-\infty}^{\infty}(\varphi+\sqrt{-1}0)^{\alpha-1}dt$$

を得る．ここで

$$E_\alpha(x,x')=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\varphi+\sqrt{-1}0)^\alpha}{(t-\frac{\sqrt{-1}}{2}(x_1-x_1'))}dt \tag{4.3.61}$$

は microfunction の積分として well-defined であることに注意しておこう*). (第3章第2節定理 3.2.1.)

更に，次のよく知られた公式

(4.3.62) $\Gamma(-\alpha)\int_{-\infty}^{\infty}(t^2+A)^{\alpha}dt=\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(-\alpha-\frac{1}{2}\right)A^{\alpha+\frac{1}{2}}\quad(\mathrm{Im}A>0)$

を用いて

(4.3.63) $$\int_{-\infty}^{\infty}(\varphi+\sqrt{-1}\,0)^{\alpha-1}dt=$$
$$=e^{-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(-\alpha+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(-\alpha+1)}\left(x_n-x_n'+\frac{\sqrt{-1}}{2}(x_1{}^2+x_1'^{2})+\sqrt{-1}\,0\right)^{\alpha-\frac{1}{2}}$$

を得る(第3章第2節例 3.2.8 参照)．従って

(4.3.64) $E(x,x')\underset{\mathrm{def}}{=}\frac{1}{4\pi^2}E_{-1}(x,x')\prod_{j=2}^{n-1}\delta(x_j-x_j')$

と定めれば，以上をまとめて次の結果を得る．

(4.3.65) $P(x,D_x)E(x,x')=\delta(x-x')$

(4.3.66) $$P^*(x',D_{x'})E(x,x')=$$
$$=\delta(x-x')-\frac{e^{-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}}{4\pi}\left(x_n-x_n'+\frac{\sqrt{-1}}{2}(x_1^2+x_1'^{2})+\sqrt{-1}\,0\right)^{-\frac{3}{2}}\prod_{j=2}^{n-1}\delta(x_j-x_j')$$

但し，等号は $(x,x';\ \sqrt{-1}(\langle\xi,dx\rangle+\langle\xi',dx\rangle\infty)=$
$=(0,0;\ \sqrt{-1}(dx_n-dx_n')\infty)\in\sqrt{-1}S^*(\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n)$ の近傍で成立する．

ここで $-\frac{e^{-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}}{4\pi}\left(x_n-x_n'+\frac{\sqrt{-1}}{2}(x_1^2+x_1'^{2})+\sqrt{-1}\,0\right)^{-\frac{3}{2}}\prod_{j=2}^{n-1}\delta(x_j-x_j')$

を核函数とする超局所作用素を $\mathscr{K}$，同じく，$E(x,x')$ を核函数とする超局所作用素を $\mathfrak{E}$ と記すことにすれば，(4.3.65) および (4.3.66) は $(x;\sqrt{-1}\langle\xi,dx\rangle\infty)=(0;\sqrt{-1}dx_n\infty)$ の近傍で定義された超局所作用素の間の関係式として次の

---

*) 以下に用いる $\alpha=-1$ の時には次の公式を用いて具体的に計算することも可能である．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(a+\sqrt{-1}t)(c+bt+\sqrt{-1}(a^2+t^2))}=$$
$$=2\pi i\left\{\frac{Y(a)}{\sqrt{-1}(c-2\sqrt{-1}ab)}+\frac{Y(\mathrm{Im}\alpha)}{(a+\sqrt{-1}\alpha)\sqrt{-1}(\alpha-\beta)}+\frac{Y(\mathrm{Im}\beta)}{(a+\sqrt{-1}\beta)\sqrt{-1}(\beta-\alpha)}\right\}$$

但し，$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\}=\frac{\sqrt{-1}b\pm\sqrt{-1}\sqrt{4a^2+b^2-4\sqrt{-1}c}}{2}$.

ように読み直すことができる：

(4.3.65′) $P\mathfrak{E}=1$

(4.3.66′) $\mathfrak{E}P=1-\mathscr{K}$

$Q(x, D_x)$ に対しても，$R=Q^*(x', D_{x'})-(\sqrt{-1}D_t/2)$,

$R'=Q(x, D_x)-(\sqrt{-1}D_t/2)$

と定めれば，$R\varphi=0$, $R'\varphi=\sqrt{-1}(x_1-x_1'-2\sqrt{-1}t)$ を得るから，全く同様の議論により次の結果を得る：

$\mathfrak{F}$ を

$$\frac{1}{4\pi^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(t+\frac{\sqrt{-1}}{2}(x_1-x_1')\right)(\varphi+\sqrt{-1}0)}dt\right)\prod_{j=2}^{n-1}\delta(x_j-x_j')$$

を核函数とする，$(0;\sqrt{-1}dx_n\infty)$ の近傍で定義された超局所作用素とする時

(4.3.67) $Q\mathfrak{F}=1-\mathscr{K}$

(4.3.68) $\mathfrak{F}Q=1$

が成立する.

従って，例えば(4.3.67)と(4.3.68)により超局所作用素に対する結合律(第3章第4節定義3.4.1の後の系）を用いて，$Q=Q(\mathfrak{F}Q)=(Q\mathfrak{F})Q=(1-\mathscr{K})Q=Q-\mathscr{K}Q$ を得るから $\mathscr{K}Q=0$. 又，$\mathscr{K}f=0$ ならば，(4.3.67) より $Q(\mathfrak{F}f)=f-\mathscr{K}f=f$ 故，$\mathrm{Ker}\,\mathscr{K}\subset\mathrm{Im}Q$. 従って $\mathrm{Ker}\,\mathscr{K}=\mathrm{Im}Q$. 同様に (4.3.65′) と (4.3.66′) を用いて，$\mathrm{Im}\,\mathscr{K}=\mathrm{Ker}\,P$ を得る．Q が単射的であること，又，P が全射的であることは，各々 (4.3.68) および (4.3.65′) より明らかである．かくして完全系列 (4.3.51) が得られた． （証終）

定理 4.3.5 (および注意 4.3.9) と上述の定理を合わせて，我々は次の決定的な結果を得る．

定理 4.3.7. $P(x, D_x)$ を $(x^0, \sqrt{-1}\xi^0\infty)\in\sqrt{-1}S^*M$ の近傍で定義された m 階擬微分作用素とし，$f(x,\xi)=\sigma_m(P)(x,\sqrt{-1}\xi)$ と記すこととする．この時次の事実が成立する：

（I） $f(x^0,\xi^0)=0$, $\{f,\bar{f}\}(x^0,\xi^0)\gneqq 0$ の時：

P は $(x^0,\sqrt{-1}\xi^0\infty)$ の近傍で全射的であり，$\mathrm{Ker}\,P$ は適当な超局所作用素 $\mathscr{K}$ の値域と一致する．

（II） $f(x^0,\xi^0)=0$, $\{f,\bar{f}\}(x^0,\xi^0)\lneqq 0$ の時：

Pは $(x^0, \sqrt{-1}\xi^0\infty)$ の近傍で単射的であるが，全射的ではない．その値域は適当な超局所作用素$\mathscr{K}$の核 (Ker $\mathscr{K}$) と一致する．即ち，方程式 $Pu=g$ が解ける為には，$\mathscr{K}g=0$ が満たされねばならない．

注意 4.3.11. H. Lewy [1] が 1957 年に，

$$\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)-(x_1+\sqrt{-1}x_2)\frac{\partial}{\partial x_3}\right)u=g$$

なる方程式が(局所的に)可解でないことを見出して世界にセンセーションを巻き起こして以来，線型偏微分方程式の可解性の問題は斯学の中心的課題であったが，遂に"generic"な方程式について，上のように最も望ましい形で解答が得られたのである*)．定理 4.3.3 と並んで，超局所解析学の有用性を最も如実に示す結果である．なお，Lewy [1] による上の形の方程式を標準型として採用することも可能であるが，ここでは，次定理とも関係して，接触構造との関係がより明快な (4.3.47) の形の方程式を標準型として採用した．この形の標準型を持つ擬微分方程式(即ち，条件 (4.3.46)，又はその符号を替えたものを満たす方程式)を**レビ** (Lewy)-**溝畑型**の方程式と呼ぶ．

注意 4.3.10 で触れたように，P の特性多様体 V に対し，$V\cap\sqrt{-1}S^*M=V\cap\overline{V}$ は接触構造を持つ．この事実が Ker P，或いは Coker Q の記述と関係すれば非常に面白い．そして，今，そのような"予定調和"が見事に成り立っているのである．即ち：

定理 4.3.8. $P, Q, \mathscr{K}$ は定理 4.3.6 と同じとする．$M=\boldsymbol{R}^n$，$N=\{x\in M|x_1=0\}$，$Z=\{(x, \sqrt{-1}\xi\infty)\in\sqrt{-1}S^*M|x_1=0, \xi_1=0, \xi_n>0\}$ と定める．$N\underset{M}{\times}\sqrt{-1}S^*M-\sqrt{-1}S^*_NM\to\sqrt{-1}S^*N$ なる射影を用いて，Z を $\{(x', \sqrt{-1}\xi'\infty)\in\sqrt{-1}S^*N|\xi_n>0\}$ $(x'=(x_2, \cdots, x_n),\ \xi'=(\xi_2, \cdots\xi_n))$ と同一視することとする．この時 $\Omega=\{(x, \sqrt{-1}\xi\infty)\in\sqrt{-1}S^*M|\xi_n>0\}$ において，二つの層準同型 $\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi}$ を次のように定義することができる．

---

*) 以上に取り扱った場合は幾何学的には"generic"であるが，方程式系に対しても本当に"generic"と言う為には，条件(4.3.3)を満たさない方程式系についても議論をしなければいけない．然しながら，無限階の作用素を用いれば，以上とほぼ同様の議論によって，実際にその場合を論じることができることを注意しておく(注意 4.3.3 参照)．

(4.3.69)
$$\begin{array}{ccc}\Phi:\ \mathscr{C}_N & \longrightarrow & \mathscr{C}_M \\ \Cup & & \Cup \\ u(x_2,\cdots,x_n) & \longmapsto & -\dfrac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{u(x_2,x_3,\cdots,x_n')}{(x_n-x_n'+\frac{\sqrt{-1}}{2}x_1^2+\sqrt{-1}\,0)}dx_n'\end{array}$$

(4.3.70)
$$\begin{array}{ccc}\Psi:\ \mathscr{C}_M & \longrightarrow & \mathscr{C}_N \\ \Cup & & \Cup \\ v(x_1,\cdots,x_n) & \longmapsto & \mathscr{K}v|_{x_1=0}\end{array}$$

しかもこの時

(4.3.71) $\Psi\Phi=1:\mathscr{C}_N\longrightarrow\mathscr{C}_N$

(4.3.72) $\Phi\Psi=\mathscr{K}:\mathscr{C}_M\longrightarrow\mathscr{C}_M$

が成り立つ．従って特に

(4.3.73) $\Psi:\mathrm{Ker}_{\mathscr{C}_M}P\overset{\sim}{\rightarrow}\mathscr{C}_N$

なる同型を得る．

同様に，次のように層準同型 $\tilde{\Phi},\tilde{\Psi}$ を定義することができ，しかも(4.3.76)，(4.3.77) が成立する．

(4.3.74)
$$\begin{array}{ccc}\tilde{\Phi}:\ \mathscr{C}_N & \longrightarrow & \mathscr{C}_M \\ \Cup & & \Cup \\ u(x_2,\cdots,x_n) & \longmapsto & \mathscr{K}(u(x_2,\cdots,x_n)\delta(x_1))\end{array}$$

(4.3.75)
$$\begin{array}{ccc}\tilde{\Psi}:\ \mathscr{C}_M & \longrightarrow & \mathscr{C}_N \\ \Cup & & \Cup \\ v(x_1,\cdots,x_n) & \longmapsto & -\dfrac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\displaystyle\int\dfrac{v(x_1',x_2,x_3,\cdots,x_n')}{(x_n-x_n'+\frac{\sqrt{-1}}{2}x_1'^2+\sqrt{-1}\,0)}dx_1'dx_n'\end{array}$$

(4.3.76) $\tilde{\Psi}\tilde{\Phi}=1:\mathscr{C}_N\longrightarrow\mathscr{C}_N$

(4.3.77) $\tilde{\Phi}\tilde{\Psi}=\mathscr{K}:\mathscr{C}_M\longrightarrow\mathscr{C}_M$

更にこの $\tilde{\Phi}$ により

(4.3.78) $\tilde{\Phi}:\mathscr{C}_N\overset{\sim}{\rightarrow}\mathrm{Coker}_{\mathscr{C}_M}Q$

なる同型を得る．

［証明］ $\mathscr{K}$ が超局所作用素であるから，$\Phi,\Psi,\tilde{\Phi},\tilde{\Psi}$ が層準同型を定めることは殆んど明らかである．(4.3.71) を証明しよう．定義により

(4.3.79) $(\Phi\Psi)\,(u(x_2,\cdots,x_n))=$

$$=-\frac{e^{-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}}{4\pi}\int\frac{\prod_{j=2}^{n-1}\delta(x_j-x_j')}{(x_n-x_n'+\frac{\sqrt{-1}}{2}x_1'^2+\sqrt{-1}\,0)^{3/2}}\times$$

$$\times\int\frac{u(x_2',x_3',\cdots,x_n'')}{(-2\pi\sqrt{-1})(x_n'-x_n''+\frac{\sqrt{-1}}{2}x_1'^2+\sqrt{-1}\,0)}dx_n''\prod_{j=1}^{n}dx_j'$$

である．他方，留数計算と (4.3.62) により

$$(4.3.80)\quad\int\frac{dx_1'dx_n'}{(x_n-x_n'+\frac{\sqrt{-1}}{2}x_1'^2+\sqrt{-1}\,0)^{3/2}(x_n'-x_n''+\frac{\sqrt{-1}}{2}x_1'^2+\sqrt{-1}\,0)}$$

$$=-2\pi\sqrt{-1}\int\frac{dx_1'}{(x_n-x_n''+\sqrt{-1}x_1'^2+\sqrt{-1}\,0)^{3/2}}$$

$$=-2\pi\sqrt{-1}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1)}{e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}\Gamma(3/2)}\frac{1}{(x_n-x_n''+\sqrt{-1}\,0)}$$

$$=-4\pi\,e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}\frac{1}{(x_n-x_n''+\sqrt{-1}\,0)}$$

を得る．これを (4.3.79) に代入すれば，明らかに Z において $\Psi\Phi=1$ が成り立つ．(4.3.72)，(4.3.76)，(4.3.77) の証明も全く同様である．次に (4.3.73) を示そう．(4.3.71) と (4.3.72) により $\mathscr{K}^2=(\Phi\Psi)(\Phi\Psi)=\Phi(\Psi\Phi)\Psi=\Phi\Psi=\mathscr{K}$ が成り立つことにまず注意しよう．他方，完全系列(4.3.51)により，$v\in\mathrm{Ker}\,P$ ならば，或る $g\in\mathscr{C}_M$ が存在して $v=\mathscr{K}g$ と表わすことができる．従って $\Psi v=\mathscr{K}v|_{x_1=0}=\mathscr{K}^2g|_{x_1=0}=\mathscr{K}g|_{x_1=0}=v|_{x_1=0}$ が得られる．これは (4.3.73) なる同型を意味している．(4.3.78) に言う同型は (4.3.67) により

$$\tilde{\Phi}u=\delta(x_1)u(x_2,\cdots,x_n)-Q\mathfrak{F}(\delta(x_1)u(x_2,\cdots,x_n))$$
$$\equiv\delta(x_1)u(x_2,\cdots,x_n)\quad\mathrm{mod}\ Q\mathscr{C}_M$$

を得るから明らかである．　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証終）

Microfunction の層$\mathscr{C}$は脆弱層であるから(第3章第7節定理 3.7.1)，定理 4.3.7 と定理 4.3.8 を合わせて直ちに次の定理を得る．

定理 4.3.9. 記号は定理 4.3.7 と同じとする．場合(Ⅰ)における Ker P および場合(Ⅱ)における Coker P は，$V\cap\overline{V}(=V\cap\sqrt{-1}S^*N)$ 上の脆弱層である．

さて，定理 4.3.4 以降，話を単独方程式に限定してきたが，実は，定理 4.3.1 を(複素領域の定理と見做して)うまく用いれば，以上の Lewy-溝畑型の方程式についての結果を過剰決定系の場合に拡張することも可能である．なお，その際，定理 4.3.8 は極めて有用に用いられることを付言しておく．ここでは簡

単に結果だけ紹介しておく．詳しくは S-K-K [1] 第Ⅲ章 §2.3を参照されたい．結果は，次に定義する"一般化された Levi 型式"を用いて述べられる．

定義 4.3.2. M を実解析的多様体とする．点 $(x^0, \sqrt{-1}\langle\xi^0, dx\rangle\infty)\in\sqrt{-1}S^*M$ の複素近傍で定義された包合的部分多様体 V が $\{(x, \sqrt{-1}\langle\xi, dx\rangle\infty) \mid p_1(x, \sqrt{-1}\xi)=\cdots=p_d(x, \sqrt{-1}\xi)=0\}$ と書き表わされているとする．この時，V の"**一般化されたレビ** (Levi) **型式**"とは次のエルミート行列 $L(x,\xi)$のことを謂う．

$$(4.3.81)\qquad L(x,\ \xi)=\left(\frac{1}{2\sqrt{-1}}\{p_j(x,\xi),\ \bar{p}_k(x,\xi)\}\right)_{1\le j,k\le d}$$

注意 4.3.12. $L(x,\xi)$ の正の固有値の数および負の固有値の数は各々，V の定義函数の取り方によらずに定まる．また，それ等は，実の接触変換に対しても不変である．L を"一般化された Levi 型式"と呼ぶのは，函数論で言う"Levi 型式"(例えば一松 [1] 参照)との類似によるが，実際この二つの概念が極めて密接に関係していることが知られている (柏原-河合 [1] 例3)． 詳しい議論は，境界値問題に関する議論を必要とするので，ここでは省略する．

"一般化された Levi 型式"を用いて，過剰決定系の場合の方程式の標準型についての結果は次のように述べられる：

$\mathscr{M}$ は $(x^0, \sqrt{-1}\langle\xi^0, dx\rangle\infty)\in\sqrt{-1}S^*M$ の近傍で定義され，条件 (4.3.1)，(4.3.2)，(4.3.3) を満たす $\mathscr{E}$-加群とする．更に $V(J)$ の一般化された Levi 型式が p 個の真に正の固有値と $q=(d-p)$ 個の真に負の固有値を $(x^0, \sqrt{-1}\xi^0)$ で持っているとする．この時，適当な量子化接触変換により $\mathscr{M}$ は $(y^0, \sqrt{-1}\langle\eta^0, dy\rangle\infty)=(0;\sqrt{-1}dy_n\infty)$ の近傍で定義された次の形の方程式系 (その方程式系を $((p, d-p)$ 型の) **Lewy-溝畑系**と呼ぶ)に変換される．

$$(4.3.82)\qquad \mathscr{N}_p\colon\ \begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial y_j}-\sqrt{-1}y_j\dfrac{\partial}{\partial y_n}\right)u=0 & (j=1,\cdots,p)\\[2ex] \left(\dfrac{\partial}{\partial y_j}+\sqrt{-1}y_j\dfrac{\partial}{\partial y_n}\right)u=0 & (j=p+1,\cdots,p+q=d)\end{cases}$$

方程式系 $\mathscr{N}_p$ の microfunction 解の構造を調べることは，定理 4.3.6 と定理 4.3.8 を用いればホモロジー代数の演習問題である．

なお，(4.3.82) は，$\boldsymbol{R}^{n+1}$ において定義された次の方程式 $\tilde{\mathscr{N}}$ の解が，$\boldsymbol{R}^{n+1}$ の

超曲面 $S_p=\{y\in \boldsymbol{R}^{n+1}\mid y_{n+1}-\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{p}y_j{}^2-\sum_{j=p+1}^{d}y_j{}^2\right)=0\}$ 上で満たす関係式に他ならない．

$$(4.3.83)\quad \tilde{\mathcal{N}}:\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial y_j}u=0,\ j=1,\cdots,d\quad(d\leqq n-1)\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial y_n}+\sqrt{-1}\dfrac{\partial}{\partial y_{n+1}}\right)u=0\end{cases}$$

ここで $\tilde{\mathcal{N}}$ と云う方程式の解と $\mathcal{N}_p$ の解の間に何か関係があるはずで，$\tilde{\mathcal{N}}$ の解の様子から $\mathcal{N}_p$ の解の構造を調べる，或いは，その逆のことを行うことができるであろう，と期待される．この問題を追求していくと，“境界値問題とは何か”という問題に逢着する．これに対する，かなり満足すべき解答は柏原-河合 [1], [2] によって与えられているが，やや本書の程度を越えると思われるので，ここではそのような問題意識があり得ることに言及するにとどめたい．

最後に，次の注意を与えて本書の締め括りとしよう．

定理 4.3.1 は $\mathcal{M}$ の特性多様体 V が実の場合に，また，定理 4.3.5 は $V\cap\overline{V}$ が横断的に交わり，かつ，$V\cap\overline{V}$ が接触構造を有する場合に，各々 $\mathcal{M}$ の標準型を与えた．もう一つ，やや退化した場合ではあるが，$V\cap\overline{V}$ が非特異な包合的部分多様体になる場合に $\mathcal{M}$ の標準型を求めることも，理論的には重要である．この場合 ($\omega|_{V\cap\overline{V}}\neq 0$ の仮定の下に)，$\mathcal{M}$ の標準型は次の (部分) Cauchy-Riemann 系であることが知られている．

$$(4.3.84)\quad \mathcal{N}:\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y_{2j-1}}+\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_{2j}}\right)u=0,\qquad j=1,\cdots,d$$

但し $\mathcal{N}$ は $(y,\sqrt{-1}\langle\eta,dy\rangle\infty)=(0,\sqrt{-1}dy_n\infty)$ の近傍で考えるものとする．

そして，一般に，“generic”な方程式 $\mathcal{M}$ は，(部分) de Rham 系．Lewy-溝畑系 $\mathcal{M}_p$，(部分) Cauchy-Riemann 系，の三つの混ざった方程式系に同型であることが知られている (S-K-K [1] 第Ⅲ章 § 2.4)．線型微分方程式論の局所理論で得られた最も深く美しい結果である．

文　　献 (配列は著者名のアルファベット順)

本文中，必要があって引用したものに限る．従って重要な関係論文を網羅している訳では決してない．また，本文中"証明(或いは，これこれの話題)についてはこれこれを参照"とある所で，特別の興味を感じない限り一々神経質に他の文献を当る必要もないと思う——人生は有限なのだから——．なお，教科書的な文献を参照する場合には，できるだけ，日本語で書かれた，手に入り易いものを選んだつもりである．その為に，必ずしも原論文を引用しはしなかったが，入門書としての本書の性格より，この点については当事者の御寛恕を頂けるものと思っている．

Atiyah, M.F., R. Bott and L. Gårding: [1] Lacunas for hyperbolic differential operators with constant coefficients I, Acta Math., **124**(1970), 109-189.

——— : [2]———II, *ibid.*, **131**(1973), 145-206.

Bony, J.M.: [1] Une extension du théorème de Holmgren sur l'unicité du problème de Cauchy, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A **268**(1969), 1103-1106.

——— : [2] Equivalence des diverses notions de spectre singulier analytique, Sém. Goulaouic-Schwartz (1976/77), Ecole Polytechnique, Exposé. 3.

Bony, J.M. et P. Schapira: [1] Solutions hyperfonctions du problème de Cauchy, Lecture Notes in Math. No. 287, Springer, 1973, pp.82-98.

Boutet de Monvel, L. and P. Krée: [1] Pseudo-differential operators and Gevrey classes, Ann. Inst. Fourier, **17**-1(1967), 295-323.

Bruhat, F. et H. Whitney: [1] Quelques propriétés fondamentales des ensembles analytiques-réels, Comm. Math. Helv., **33**(1959), 132-160.

クーラン-ヒルベルト：[1] 数理物理学の方法，1—4，東京図書，1962—1968. (旧版 Methoden der Mathematischen Physik, I,II, Springer (1924, 1937)の邦訳．英訳新版は Interscience より 1953 年および 1962 年に出ている．特に第 2 巻は全く面目を一新している．然しながら旧版にも捨て難い味があるように思う．)

Eden, R.J., P.V. Landshoff, D.I. Olive and J.C. Polkinghorne: [1] The Analytic S-matrix, Cambridge University Press, 1966.

Egorov, Yu. V.: [1] On canonical transformations of pseudo-differential operators, Uspehi Mat. Nauk, **24**(1969), 235-236(in Russian).

Ehrenpreis, L.: [1] Fourier Analysis in Several Compex Variables, Wiley-Interscience, 1970.

Gårding, L.: [1] Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients, Acta, Math., **85**(1950), 1-62.

Gel'fand, I.M. and G.E. Shilov: [1] Generalized Functions, Vol. 1., Academic Press, 1964. (原著(露語)は 1959 年刊. 邦訳(共立出版)は残念なことに今は品切の様である.)

Gel'fand, I.M., M.I. Graev and N.Ya. Vilenkin: [1] Generalized Functions, Vol. 5, Academic Press, 1966. (原著(露語)は 1962 年刊)

Grauert, H.: [1] On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds, Ann. of Math., **68**(1958), 460-472.

Grothendieck, A.: [1] Local Cohomology, Lecture Notes in Math. No. 41, Springer, 1967.

Hamada, Y.: [1] The singularities of the solutions of the Cauchy problem, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **5**(1969), 21-40.

ヒルベルト, D : [1] ヒルベルト数学の問題, 共立出版, 1969.

一松 信 : [1] 多変数解析函数論, 培風館, 1960.

Hörmander, L.: [1] Linear Partial Differential Operators, Springer, 1963.

——— : [2] Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients, Comm. Pure Appl. Math., **24** (1971), 671-704.

——— : [3] Fourier integral operators I, Acta Math., **127**(1971), 79-183.

Iagolnitzer, D.: Analytic structure of distributions and essential support theory, Structural Analysis of Collision Amplitudes, North Holland, 1976, pp.295-358.

Iagolnitzer, D and H.P. Stapp: [1] Macroscopic causality and physical region analyticity in S-matrix theory, Commun. math. Phys. **14**(1969), 15-55.

John, F.: [1] The fundamental solution of linear elliptic differential equations with analytic coefficients, Comm. Pure Appl. Math., **3**(1950), 273-304.

——— : [2] Plane Waves and Spherical Means Applied to Partial Differential Equations, Interscience, 1955.

——— : [3] Continuous dependence on data for solutions of partial differential equations with a prescribed bound, Comm. Pure Appl. Math. **13**(1960), 551-585.

Kashiwara, M.: [1] On the maximally overdetermined system of linear differential equations. I., Publ. RIMS, Kyoto Univ., **10**(1975), 563-579.

——— : [2] 未発表, なお, Guillemin, V.W., D. Quillen and S. Sternberg: Integrability of characteristics, Comm. Pure Appl. Math., **23**(1970), 39-77. も参照.

Kashiwara, M. and T. Kawai: [1] On the boundary value problem for elliptic system of linear differential equations, I, Proc. Japan Acad., **48**(1972), 712-715.

——— : [2] II, Proc. Japan Acad., **49**(1973), 164-168.

——— : [3] Micro-hyperbolic pseudo-differential operators I. J. Math. Soc. Japan, **27**(1975), 359-404.

——— : [4] Finiteness theorem for holonomic systems of micro-differential equations, Proc. Japan Acad., **52**(1976), 341-343.

Kawai, T.: [1] On the theory of Fourier hyperfunctions and its applications to partial differential equations with constant coefficients, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, **17**(1970), 467-517.

——— : [2] Construction of local elementary solutions for linear partial differential operators with real analytic coefficients (I)——The case with real principal symbols——, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **7**(1971), 363-397.

Kawai, T. and H.P. Stapp: [1] Micro-local study of the S-matrix singularity structure, Lecture Notes in Phys., No. 39, Springer, 1975, pp.38-48.

Komatsu, H.: [1] Resolution by hyperfunctions of sheaves of solutions of differential equations with constant coefficients, Math. Ann., **176**(1968), 77-86.

——— : [2] A local version of Bochner's tube theorem, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, **19**(1972), 201-214.

Lax, P.D.: [1] Asymptotic solutions of oscilatory initial value problems, Duke Math. J., **24**(1957), 627-646.

Leray, J.: [1] Problème de Cauchy, IV, Bull. Soc. math. France, **90**(1962), 39-156.

Lewy, H.: [1] An example of a smooth linear partial differential equations without solutions, Ann. of Math. **66**(1957). 155-158.

Malgrange, B.: [1] Faisceux sur des variétés analytiques réelles, Bull. Soc. math.

France, **83**(1955), 231-237.

マスロフ, V.P.: [1] 摂動論と漸近的方法, 岩波書店, 1976. (原著(露語)は1965年刊)

松島与三：[1] 多様体入門, 裳華房, 1965.

Mizohata, S.: [1] Some remarks on the Cauchy problem, J. Math. Kyoto Univ. **1**(1961), 109-127.

———：[2] Solutions nulles et solutions non-analytiques, *ibid.* **1**(1962), 271-302.

Morimoto, M.: [1] Edge of the wedge theorem and hyperfunctions, Lecture Notes in Math., No. 287, Springer, 1973, pp.41-81.

———：[2] 未発表, なお, 森本光生：超函数の台と特異台(佐藤予想と層 $\mathscr{C}_{N|X}$) 京都大学数理研講究録, **168**(1972), 28-59. を参照.

中西　襄：[1] 場の量子論, 培風館, 1975.

大島利雄, 小松彦三郎：[1] 1階偏微分方程式(岩波講座基礎数学, 解析学(Ⅱ)iii), 岩波書店, 1977.

Petrowsky, I.G.: [1] On the diffusion of waves and the lacunas for hyperbolic equations. Mat. Sb. **17**(1945), 289-370.

Sato, M.: [1] Theory of hyperfunctions, I., II., J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I. **8**(1959/60), 139-193, 387-437.

———：[2] Recent development in hyperfunction theory and its applications to physics, Lecture Notes in Physics, No. 39, Springer, 1975, pp.13-29.

Sato, M., T. Kawai and M. Kashiwara: [1] (本文中 S-K-K[1] と略記) Microfunctions and pseudo-differential equations, Lecture Notes in Math. No. 287, Springer, 1973, pp.265-529.

———：[2] On the structure of single linear pseudo-differential equations, Proc. Japan Acad., **48**(1972), 643-646.

Schwartz, L.: [1] Théorie des distributions, Hermann, 1950-51. 新版1966. 新版邦訳, 岩波書店, 1971.

Suzuki, F.: [1] On the global existence of holomorphic solutions of the equation $\partial u/\partial x_1=f$, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A., **11**(1972), 253-258.

Vladimirov, V.S.: [1] Methods of the Theory of Functions of Many Complex Variables, The M.I.T. Press, 1966. (原著)露語)は1964年刊)

山内恭彦：[1] 一般力学(第3版), 岩波書店, 1965.

吉田耕作：[1] 微分方程式の解法(第2版), 岩波書店, 1978.

索　　引

ア 行

カ 行

サ 行

ラ 行

ワ 行

記 号 表

（定義，名称は本文参照）

（Ⅰ） 層理論に関係したもの（以下において $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ は層）

（Ⅱ） 多様体に関係したもの（以下において M, N は多様体．本文中，場所によっては M, N の代わりに X, Y 等を用いている所もある）

著　　者

柏原正樹

昭和22年生まれ．昭和44年東京大学理学部数学科卒業．昭和46年東京大学理学系大学院修士課程修了後京都大学数理解析研究所助手となる．名古屋大学理学部助教授を経て現在京都大学数理解析研究所教授．昭和56年度彌永賞受賞．京大理博．専攻　解析学．

河合隆裕

昭和20年生まれ．昭和43年東京大学理学部数学科卒業．昭和45年東京大学理学系大学院修士課程修了後京都大学数理解析研究所助手となり，同講師を経て現在同助教授．昭和52年度彌永賞受賞．京大理博．専攻　解析学．

木村達雄

昭和22年生まれ．昭和45年東京大学理学部数学科卒業．昭和48年東京大学理学系大学院修士課程修了後名古屋大学理学部助手となり，現在筑波大学数学系助教授．名大理博．専攻　代数学・数論．

代数解析学の基礎

定価 7000 円

1980 年 4 月 15 日　第1刷発行
1987 年 11 月 20 日　第4刷発行

発行所　株式会社 紀伊國屋書店
東京都新宿区新宿3の17の7
電話 (354) 0131 (代表)
振替口座東京 9-125575

出版部　東京都世田谷区桜丘5の38の1
電話 (439) 0125 (代表)
郵便番号 156

ISBN 4-314-00293-X C3341
PRINTED IN JAPAN

印刷　研究社印刷
製本　三水舎

紀伊國屋数学叢書について

数学を学ぶにはいろいろの段階があるが，いずれの場合でも書物などによって自学自習することが最も重要であり，単に講義を聞くというような受動的な勉強だけでは，はなはだ不十分である．

みずから学ぶために現在いろいろな数学書が出版されている．しかし，数学の進歩は極めて基礎的な考え方に対してさえ常に影響を与えており，従ってどのような段階の勉強であっても，常に新しい考え方を理解することが必要である．このためには，数学の過去と将来とを結ぶ視点から書かれた書物が数多く出版されることが望ましい．即ち，新しい視点と古典的な視点とを見くらべ，基本的なことをも将来の発展を考慮した視点から説明するという立場で書かれた書物が要望されている．

本叢書はこのような要望に応えて企画されたものであって，各巻が大学理工学系の専門課程の学生または大学院学生がそれぞれの分野での話題，対象について入門の段階からある程度の深さまで勉学するための伴侶となることを目指している．このために我々は各巻の話題の選択について，十分配慮し，現代数学の発展にとって重要であり，また既刊書で必ずしも重点が置かれていないものを選び，各分野の第一線で活躍しておられる数学者に執筆をお願いしている．

学生諸君および数学同好の方々が，この叢書によって数学の種々の分野における基本的な考え方を理解し，また基礎的な知識を会得することを期待するとともに，更に現代数学の最先端へ向かおうとする場合の基礎ともなることを望みたい．